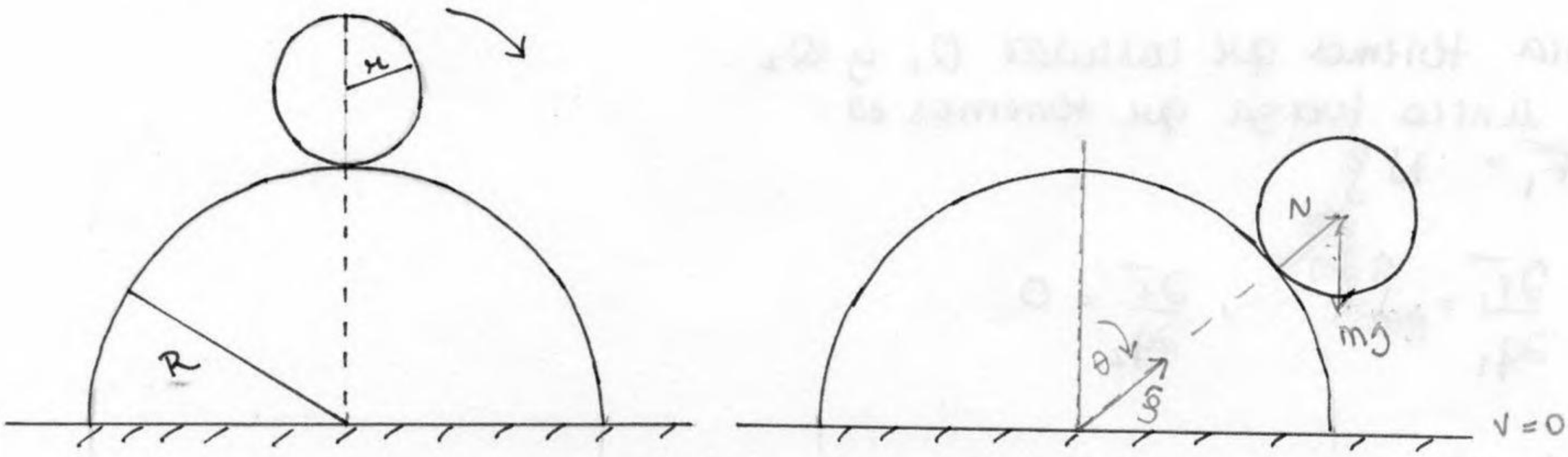
FI20222 - Mecánica Clásica II

6

Tarea 2 : Resolver usando el método de Lagrange

Problema 1:

Calcule el ángulo de despegue cuando el cilindro de radio r rueda sin resbalar, partiendo del reposo en la posición superior.



Primero escribimos la posición del centro de masa del cilindro

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} = q_1\hat{\rho}$

Las coordenadas generalizadas: $q_1 = (R+r)$

$q_2 = \theta$

La energía cinética es:

$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + T_{rot}$

Donde $\dot{\vec{r}} = \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\rho}\hat{\rho} = q_1\dot{q}_2\hat{\theta} + \dot{q}_1\hat{\rho}$

$\dot{\vec{r}}^2 = \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2 = q_1^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2$

La energía potencial:

$V = mg(R+r)\cos(\theta) = q_1 mg\cos(q_2)$

Entonces el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(q_1^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2) - q_1 mg\cos(q_2)$$

Ahora calculamos las derivadas del lagrangiano:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = m\dot{q}_2^2 q_1 - mg\cos(q_2) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = q_1 mg\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = mq_1^2\dot{q}_2$$

Ahora tenemos que calcular Q_1 y Q_2.
La única fuerza que tenemos es.

$$\vec{F}_1 = N\hat{\rho}$$

y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \hat{\rho}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0$

Nos queda

$$Q_1 = F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = (N\hat{\rho})\cdot(\hat{\rho}) = N$$

$$Q_2 = F_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0$$

Ahora podemos escribir las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda$$

La primera ecuación nos queda:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = Q_1$$

$$m\ddot{q}_1 - m\dot{q}_2^2 q_1 + mg\cos(q_2) = N$$

Queda:

$$-m(2g - 2g\cos(q_2)) + g\cos(q_2) = N$$

Para que el cilindro se despegue $N=0$, entonces:

$$-m(2g - 2g\cos(q_2)) + mg\cos(q_2) = N = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2g + 2g\cos(q_2) + g\cos(q_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos(q_2) = \frac{2g}{3g} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad q_2 = \theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Entonces el ángulo de despegue es:

$$\boxed{\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)}$$

5

La segunda ecuación nos queda:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = Q_2$$

$$m q_1^2 \ddot{q}_2 + 2 m q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_1 m g \sin q_2 = 0$$

Por otro lado tenemos que $\dot{q}_1 = \ddot{q}_1 = 0$, las ecuaciones nos quedan:

$$-m \dot{q}_2^2 q_1 + mg\cos(q_2) = N \quad (1)$$

$$m q_1^2 \ddot{q}_2 - q_1 m g \sin(q_2) = 0 \quad (2)$$

De (2) podemos obtener $\dot{q}_2$:

$$m q_1^2 \ddot{q}_2 - q_1 m g \sin(q_2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad q_1 \ddot{q}_2 - g \sin(q_2) = 0$$

Podemos escribir $\ddot{q}_2 = \frac{d\dot{q}_2}{dt} = \frac{d\dot{q}_2}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dq_2} = \frac{d\dot{q}_2}{dq_2} \cdot \dot{q}_2$

Reemplazando en la ecuación:

$$q_1 \dot{q}_2 \frac{d\dot{q}_2}{dq_2} = g \sin(q_2)$$

$$\Rightarrow \quad q_1 \int_0^{\dot{q}_2} \dot{q}_2' \, d\dot{q}_2' = g \int_0^{q_2} \sin(q_2) \, dq_2$$

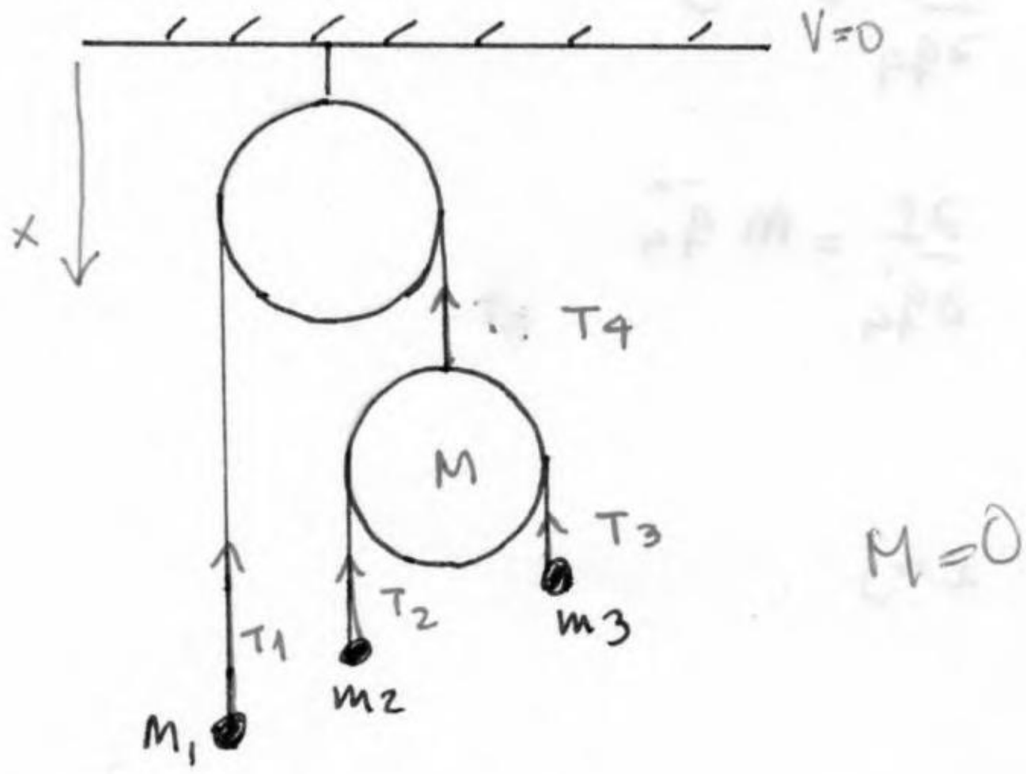
El intervalo de integración va de 0 a q_2 ó 0 a $\dot{q}_2$, porque el cilindro parte del reposo en la posición superior.

$$q_1 \frac{\dot{q}_2^2}{2} = g(1 - \cos(q_2))$$

$$q_1 \dot{q}_2^2 = 2g - 2g\cos(q_2).$$

Reemplazamos esta expresión en (1).

Problema 2: Encuentre las aceleraciones.



$M=0$

Escribimos las posiciones:

$\vec{r_1} = x_1 \hat{x}$
$\vec{r_2} = x_2 \hat{x}$
$\vec{r_3} = x_3 \hat{x}$ } posiciones m_1, m_2, m_3 respectivamente.
$\vec{r_4} = x_4 \hat{x}$ → posición polea

Elegimos las coordenadas:

$q_1 = x_1$
$q_2 = x_2$
$q_3 = x_3$
$q_4 = x_4$

Entonces →

$\vec{r_1} = q_1 \hat{x}$
$\vec{r_2} = q_2 \hat{x}$
$\vec{r_3} = q_3 \hat{x}$
$\vec{r_4} = q_4 \hat{x}$

Calculamos la energía cinética del sistema

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{q}_3^2 + \frac{M}{2}\dot{q}_4^2$$

La energía potencial del sistema:

$$V = -m_1 g q_1 - m_2 g q_2 - m_3 g q_3 - M g q_4$$

El Lagrangiano nos queda:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{q}_3^2 + \frac{M}{2}\dot{q}_4^2 + m_1 g q_1 + m_2 g q_2 + m_3 g q_3 + M g q_4$$

Si usas $M \neq 0$ tienes que introducir el momento de inercia.

Ahora calculamos las derivadas del lagrangiano.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = m_1 g \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = m_2 g \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = m_3 g \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_4} = M g$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = m_3 \dot{q}_3 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_4} = M \dot{q}_4$$

Ahora calculamos:

$\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$, donde $\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \hat{x}$ cuando $i = j$

$\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = 0$ cuando $i \neq j$

Tenemos que las fuerzas son:

$\vec{F}_1 = -T_1 \hat{x}$

$\vec{F}_2 = -T_2 \hat{x}$ donde $T_1 = T_4$ y $T_3 = T_2$

$\vec{F}_3 = -T_3 \hat{x}$

$\vec{F}_4 = -T_4 \hat{x}$

No era necesario usar los Q's, ya que no te pedian las tensiones.

Entonces:

$$Q_1 = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{F}_2 \cancelto{0}{\frac{\partial r_2}{\partial q_1}} + \vec{F}_3 \cancelto{0}{\frac{\partial r_3}{\partial q_1}} + \vec{F}_4 \cdot \cancelto{0}{\frac{\partial r_4}{\partial q_1}} = -T_1 \hat{x} \cdot \hat{x} = -T_1$$

$$Q_2 = \vec{F}_1 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2}} + \vec{F}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} + \vec{F}_3 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_2}} + \vec{F}_4 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_4}{\partial q_2}} = -T_2 \hat{x} \cdot \hat{x} = -T_2$$

$$Q_3 = \vec{F}_1 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_3}} + F_2 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_3}} + F_3 \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_3} + \vec{F}_4 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_4}{\partial q_3}} = -T_3 \hat{x} \cdot \hat{x} = -T_3$$

$$Q_4 = \vec{F}_1 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_4}} + \vec{F}_2 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_4}} + \vec{F}_3 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_4}} + \vec{F}_4 \frac{\partial \vec{r}_4}{\partial q_4} = -T_4 \hat{x} \cdot \hat{x} = -T_4$$

Las ecuaciones nos quedan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda$$

Entonces:

(1) $m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g = -T_1$

(2) $m_2 \ddot{q}_2 - m_2 g = -T_2$

(3) $m_3 \ddot{q}_3 - m_3 g = -T_3$

(4) $M \ddot{q}_4 - M g = -T_4$

Ahora por restricción tenemos que:

$l_1 = q_1 + q_4 \Rightarrow \ddot{q}_1 + \ddot{q}_4 = 0$

$l_2 = (q_2 - q_4) + (q_3 - q_4) \Rightarrow \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 - 2\ddot{q}_4 = 0$

Como $T_1 = T_4$ y $T_2 = T_3$

igualando (1) con (4)

$m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g = M \ddot{q}_4 - Mg$

y como $\ddot{q}_1 = -\ddot{q}_4$

$m_1 \ddot{q}_1 + M \ddot{q}_1 + g(M - m_1) = 0$

$\ddot{q}_1 (m_1 + M) + g(M - m_1) = 0$

$$\ddot{q}_1 = \frac{-g(M - m_1)}{m_1 + M} = \frac{g(m_1 - M)}{(m_1 + M)}$$

y vemos que $M = m_2 + m_3$, Entonces:

$$\boxed{\ddot{q}_1 = \frac{g(m_1 - m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)}} \quad y \quad \boxed{\ddot{q}_4 = -\frac{g(m_1 - m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$

Ahora si igualamos (2) con (3)

$$m_2 \ddot{q}_2 - m_2 g = m_3 \ddot{q}_3 - m_3 g$$

como $\ddot{q}_3 = 2\ddot{q}_a - \ddot{q}_2 = -2\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2$, queda:

$$m_2 \ddot{q}_2 - m_3 \ddot{q}_3 + g(m_3 - m_2) = 0$$
$$m_2 \ddot{q}_2 - m_3(-2\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + g(m_3 - m_2) = 0$$

$$\ddot{q}_2 (m_2 + m_3) + 2 m_3 \ddot{q}_1 + g(m_3 - m_2) = 0.$$

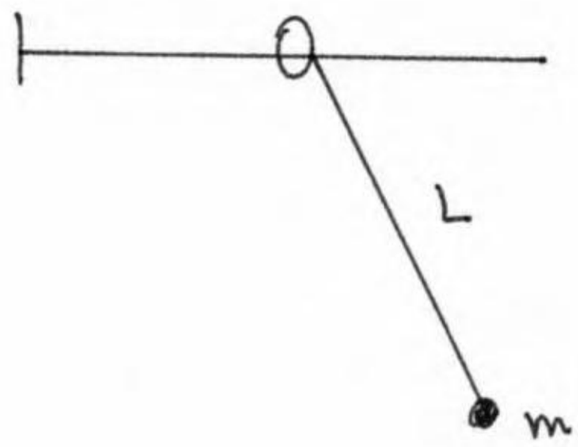
$$\ddot{q}_2 = \frac{g(m_2 - m_3)}{(m_2 + m_3)} - \frac{2 m_3 \ddot{q}_1}{m_2 + m_3}$$

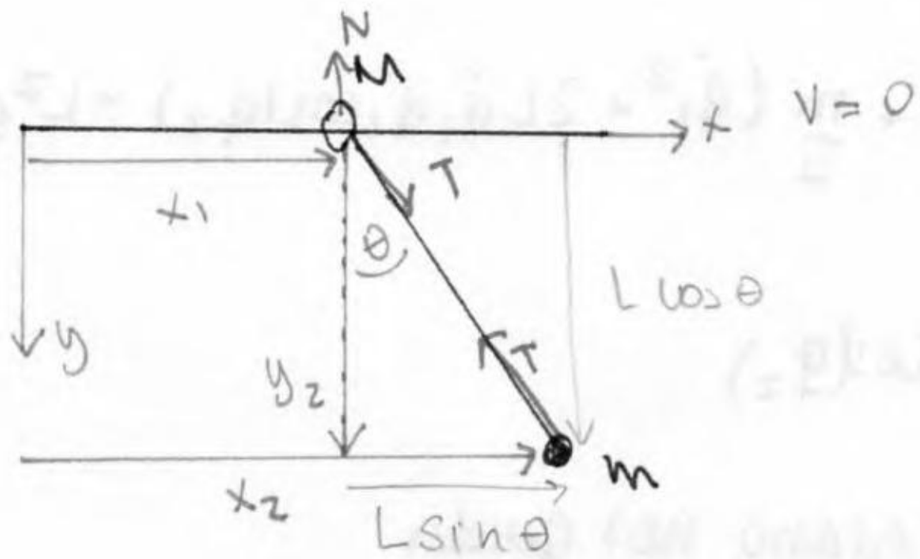
Reemplazando la expresión hallada para $\ddot{q}_1$

$$\boxed{\ddot{q}_2 = \frac{-g(-m_2 m_1 - m_2^2 + 3 m_3 m_1 - m_3^2 - 2 m_2 m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_2 + m_3)}}$$

$$\boxed{\ddot{q}_3 = -2\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = \frac{g(-3 m_2 m_1 + m_3 m_1 + m_2^2 + 2 m_2 m_3 + m_3^2)}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_2 + m_3)}}$$

Problema 3: Un péndulo de masa m y largo L cuelga de un riel sobre el que se puede deslizar sin roce.
Encuentre la ecuación de movimiento del péndulo.





La posición del anillo:

$$\vec{r_1} = x_1 \hat{x}$$

La posición de la masa:

$$\vec{r_2} = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y}$$

De la figura vemos que

$$x_2 = x_1 + L \sin\theta$$
$$y_2 = L\cos\theta$$

Si tomamos $q_1 = x_1$
$q_2 = \theta$

Las posiciones nos quedan:

$$\vec{r_1} = q_1 \hat{x}$$
$$\vec{r_2} = (q_1 + L\sin(q_2))\,\hat{x} + (L\cos(q_2))\,\hat{y}$$

Donde:

$$\dot{\vec{r_1}}^2 = \dot{q}_1^{\,2}$$

$$\dot{\vec{r_2}}^2 = (\dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_1 2L\cos(q_2)\,\dot{q}_2 + L^2\cos^2(q_2)\,\dot{q}_2^{\,2} + L^2\sin^2(q_2)\,\dot{q}_2^{\,2})$$
$$\dot{\vec{r_2}}^2 = (\dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_1 2L\cos(q_2)\,\dot{q}_2 + L^2\,\dot{q}_2^{\,2})$$

Así la energía cinética:

$$T = \frac{M}{2}\dot{\bar{r}}_1^{\,2} + \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}_2^{\,2}$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{q}_1^{\,2} + \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^{\,2} + 2L\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_2) + L^2\dot{q}_2^{\,2}\right)$$

$$V = -mgL\cos(q_2)$$

El Lagrangiano nos queda

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{M}{2}\dot{q}_1^{\,2} + \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^{\,2} + 2L\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_2) + L^2\dot{q}_2^{\,2}\right) + mgL\cos(q_2)$$

Calculamos las derivadas del Lagrangiano:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = M\dot{q}_1 + m\dot{q}_1 + mL\dot{q}_2\cos(q_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -mgL\sin(q_2) - Lm\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = mL\dot{q}_1\cos(q_2) + L^2\dot{q}_2\, m$$

Ahora calculamos Q_1 y Q_2

Donde las fuerzas son:

$$\vec{F}_1 = -N\hat{y} + T(\cos(q_2)\hat{y} + \sin(q_2)\hat{x})$$

$$\vec{F}_2 = -T(\cos(q_2)\hat{y} + \sin(q_2)\hat{z})$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} = \hat{x} \qquad \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{r_2}}{\partial q_1} = \hat{x} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r_2}}{\partial q_2} = L\cos(q_2)\,\hat{x} - L\sin(q_2)\,\hat{y}$$

Entonces:

$$Q_1 = \vec{F_1}\,\frac{\partial \vec{r_1}}{\partial q_1} + \vec{F_2}\,\frac{\partial \vec{r_2}}{\partial q_1}$$

$$Q_1 = [T\sin(q_2)\,\hat{x} + (T\cos(q_2) - N)\,\hat{y}]\cdot\hat{x} + (-T\cos(q_2)\,\hat{y} - T\sin(q_2)\,\hat{x})\cdot(\hat{x})$$

$$Q_1 = T\sin(q_2) - T\sin(q_2) = 0$$

$$Q_2 = \vec{F_1}\,\frac{\partial \vec{r_1}}{\partial q_2} + \vec{F_2}\cdot\frac{\partial \vec{r_2}}{\partial q_2}$$

$$Q_2 = [T\sin(q_2)\,\hat{x} + (T\cos(q_2) - N)\,\hat{y}]\cdot(0) + (-T\cos(q_2)\,\hat{y} - T\sin(q_2)\,\hat{x})\cdot(L\cos(q_2)\,\hat{x} - L\sin(q_2)\,\hat{y})$$

$$Q_2 = LT\cos(q_2)\sin(q_2) - LT\sin(q_2)\cos(q_2)$$

$$Q_2 = 0$$

Las ecuaciones, nos quedan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = Q_1$$

$$(M+m)\,\ddot{q}_1 + mL\ddot{q}_2\cos(q_2) - mL\dot{q}_2^{\,2}\sin q_2 = 0$$

La segunda ecuación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = Q_2$$

$$mL\ddot{q}_1\cos(q_2) - \cancel{mL\dot{q}_1\sin(q_2)\dot{q}_2} + L^2 m\ddot{q}_2 + mgL\sin(q_2) + \cancel{Lm\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(q_2)} = 0$$

$$mL\ddot{q}_1\cos(q_2) + L^2 m\ddot{q}_2 + mgL\sin(q_2) = 0$$

Finalmente nos queda:

(1) $(m+M)\ddot{x}_1 + m\ddot{\theta}L\cos\theta - m\dot{\theta}^2 L\cos\theta = 0$

(2) $m\ddot{x}_1 L\cos\theta + L^2\ddot{\theta}m + mgL\sin\theta = 0$