FIZ0222 Mecánica Clásica II

7

Tarea 5

Problema 1: Demuestre que la transformación

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \quad P = q\cot p$$

es canónica.

Solución:

Para que sea una transformación canónica se debe cumplir que:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0$$
$$[P_\alpha, P_\beta] = 0$$
$$[Q_\alpha, P_\beta] = 1 \quad \delta_{\alpha\beta}$$

Primero:

$$[Q, Q] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$[P, P] = \frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

Son condiciones que obviamente se cumplen.

Ahora calculamos.

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\log\left(\frac{1}{q}\sin p\right)\right) = \frac{1}{\frac{1}{q}\sin p}\cdot\sin p\left(-\frac{1}{q^2}\right) = -\frac{1}{q}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(q \cot p\right) = -q \csc^2 p = -\frac{q}{\sin^2 p}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\log\left(\frac{1}{q}\sin p\right)\right) = \frac{1}{\frac{1}{q}\sin p}\,\frac{1}{q}\cos p = \frac{q\cos p}{q\sin p} = \cot p$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial}\left(q \cot p\right) = \cot p$$

Reemplazando:

$$[Q, P] = \left(-\frac{1}{q}\right)\cdot\left(\frac{-q}{\sin^2 p}\right) - \left(\cot p\right)\cdot\left(\cot p\right)$$

$$[Q, P] = \csc^2 p - \cot^2 p.$$

Sabemos que $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, entonces tenemos que:

$$[Q, P] = \csc^2 p - \cot^2 p = \csc^2 p - (\csc^2 p - 1) = 1$$

De este modo hemos mostrado que la transformación $Q = Q(p, q)$ $P = P(p, q)$ es una transformación canónica.

problema 2: Considere la siguiente transformación de coordenadas:

$$Q = \log(1+\sqrt{q}\cos p)$$
$$P = 2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p.$$

(a) Muestre que la transformación es canónica
(b) Muestre que la función generatriz es:
$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

Solución:

(a) De modo análogo al ejercicio anterior, la condición que se debe cumplir para que la transformación sea canónica es:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0$$
$$[P_\alpha, P_\beta] = 0$$
$$[Q_\alpha, P_\beta] = 1 \cdot \delta_{\alpha\beta}$$

Las primeras dos se cumplen obviamente como visto en el ejercicio anterior, tenemos que ver que: $[Q, P] = 1$

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos p}\cdot\cos p\cdot\frac{1}{2}q^{-1/2} = \frac{\cos p}{2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = (-2\sqrt{q}\sin p)\sqrt{q}\sin p + (2+2\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\cos p$$
$$= -2q\sin^2 p + 2\sqrt{q}\cos p + 2q\cos^2 p$$
$$= -2q(\sin^2 p - \cos^2 p) + 2\sqrt{q}\cos p$$
$$= 2q(\cos^2 p - \sin^2 p) + 2\sqrt{q}\cos p$$
$$= 2q\cos 2p + 2\sqrt{q}\cos p.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos p} \cdot -\sqrt{q}\sin p = \frac{-\sqrt{q}\sin p}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 2 \cdot \frac{1}{2} q^{-1/2} \cos p \cdot \sqrt{q}\sin p + (2+2\sqrt{q}\cos p)\frac{1}{2} q^{-1/2} \sin p.$$

$$= \cos p \sin p + \frac{\sin p}{\sqrt{q}} + \cos p \sin p$$

$$= \frac{\sin p}{\sqrt{q}} + 2\sin p \cos p.$$

$$= \frac{\sin p}{\sqrt{q}} + \sin 2p$$

Reemplazando:

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q}$$

$$= \frac{\cos p}{2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}} \cdot (2q\cos 2p + 2\sqrt{q}\cos p) + \frac{\sqrt{q}\sin p}{1+\sqrt{q}\cos p}\left(\frac{\sin p}{\sqrt{q}} + \sin 2p\right)$$

$$= \frac{2q\cos p\cos 2p + 2\sqrt{q}\cos^2 p}{2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}\sin p}{1+\sqrt{q}\cos p} \cdot \frac{\sin p + \sqrt{q}\sin 2p}{1+\sqrt{q}\cos p}.$$

$$= \frac{2q\cos p\cos 2p + 2\sqrt{q}\cos^2 p + 2\sqrt{q}\sin^2 p + 2q\sin p\sin 2p}{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)}$$

Por otro lado sabemos que:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$$

Entonces nos queda:

$$= \frac{2\sqrt{q} + 2q\cos(p-2p)}{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)}$$

$$= \frac{2\sqrt{q} + 2q\cos(-p)}{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)}$$ como $\cos(p)$ es par $\Rightarrow \cos(p) = \cos(-p)$

$$= \frac{2\sqrt{q} + 2q\cos p}{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)}$$

$$= \frac{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)}{2\sqrt{q}(1+\sqrt{q}\cos p)} = 1.$$

Finalmente vemos que $[Q, P] = 1$, es decir, es una transformación canónica.

(b)

Ahora tenemos que mostrar que la función generatriz es $F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$.

La función generatriz $F_3 = F_3(p, Q)$ cumple que:

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \quad y \quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \quad y \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Primero calculamos P y q:

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = -\frac{\partial}{\partial Q}\left(-(e^Q - 1)^2 \tan p\right) = 2(e^Q - 1)e^Q \tan p$$

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(-(e^Q - 1)^2 \tan p\right) = (e^Q - 1)^2 \sec^2 p$$

De aquí tenemos que encontrar Q y P en función de q y p:

$$q = (e^Q - 1)^2 \operatorname{se}^2 p$$
$$q \cos^2 p = (e^Q - 1)^2$$

$$e^Q - 1 = \sqrt{q} \cos p$$

$$e^Q = 1 + \sqrt{q} \cos p$$

$$\Rightarrow Q = \log(1 + \sqrt{q} \cos p)$$

Reemplazando en la expresión hallada para P

$$P = 2(e^Q - 1) e \tan p$$

$$P = 2(e^{\log(1+\sqrt{q}\cos p)} - 1) e^{\log(1+\sqrt{q}\cos p)} \tan p$$

$$P = 2(1 + \sqrt{q}\cos p - 1)(1 + \sqrt{q}\cos p)\tan p$$
$$P = 2\sqrt{q}\cos p\,(1 + \sqrt{q}\cos p)\tan p$$

$$\Rightarrow P = 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p.$$

Como hemos encontrado Q y P a partir de F_3 hemos mostrado que $F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$ es función generatriz de la transformación canónica.

problema 3: Determine los valores de α y β para los cuales la transformación

$$Q = q^{\alpha} \cos(\beta p)$$
$$P = q^{\alpha} \sin(\beta p)$$

es canónica. Encuentre la función generatriz en ese caso.

solución:

De manera análoga a los ejercicios anteriores las condiciones que deben cumplirse para que la transformación sea canónica son:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0$$
$$[P_\alpha, P_\beta] = 0$$
$$[Q_\alpha, P_\beta] = 1 \cdot \delta_{\alpha\beta}$$

Las dos primeras se cumplen y es trivial como vimos en el ejercicio anterior.
Si usamos la última condición para hallar α, β; tendremos:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^{\alpha} \cos(\beta p)\right) = \alpha q^{\alpha-1} \cos(\beta p)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(q^{\alpha} \cos(\beta p)\right) = -q^{\alpha} \sin(\beta p)\, \beta$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^{\alpha} \sin(\beta p)\right) = \alpha q^{\alpha-1} \sin(\beta p)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(q^{\alpha} \sin(\beta p)\right) = q^{\alpha} \cos(\beta p)\, \beta$$

Reemplazando:

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1.$$

$$\alpha q^{\alpha-1} \cos(\beta p) \cdot \beta q^{\alpha} \cos(\beta p) + q^{\alpha} \beta \sin(\beta p)\, \alpha q^{\alpha-1} \sin(\beta p) = 1.$$

$$\alpha q^{\alpha-1} \beta q^{\alpha} (\cos^2(\beta p) + \sin^2(\beta p)) = 1.$$

Como $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, queda:

$$\alpha q^{\alpha-1} \beta q^{\alpha} = 1.$$

$$\alpha \beta\, q^{2\alpha-1} = 1.$$

Para que exista una igualdad, deberá cumplirse que: $2\alpha - 1 = 0$, para que el exponente de q sea cero.

De aquí $\alpha = 1/2$.

Reemplazando en: $\alpha \beta\, q^{2\alpha-1} = 1$.

$$\alpha \beta\, q^{0} = 1.$$

$$\frac{1}{2} \beta\, 1 = 1. \quad \Rightarrow \quad \beta = 2.$$

Hemos hallado $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$ de modo que la transformación sea canónica.

Ahora queremos la función generatriz F_3, esta la obtenemos de:

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \quad , \quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}.$$

Tomando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$ tenemos:

$$Q = \sqrt{q}\cos(2p)$$
$$P = \sqrt{q}\sin(2p)$$

Tenemos una ecuación diferencial, la resolvemos:

$$-P = \frac{\partial F_3}{\partial Q} \Rightarrow -\int P\,dQ + \varphi(p) = F_3.$$

Así:

$$F_3 = -\int Q\tan(2p)\,dQ + \varphi(p)$$

$$F_3 = -\frac{Q^2}{2}\tan(2p) + \varphi(p)$$

De aquí:

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{Q^2}{2}\sec^2(2p)\,2 + \varphi'(p)$$

Igualando: $-q = \frac{\partial F_3}{\partial p} = Q^2\sec^2(2p) + \varphi'(p)$

$$\varphi'(p) = -\frac{Q^2}{\cos^2(2p)} + Q^2\sec^2(2p)$$

$$\varphi'(p) = \frac{Q^2}{\cos^2(2p)} - \frac{Q^2}{\cos^2(2p)} = 0$$

$$\varphi'(p) = 0$$
$$\Rightarrow \varphi(p) = cte.$$

Finalmente:

$$F_3 = -\frac{Q^2}{2}\tan(2p) + C_1$$ con C_1 es una constante.

Hemos hallado la función generatriz. $F_3 = F_3(Q, p)$

Ahora si queremos comprobarlo; calculamos P y q del F_3 obtenido:

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = -\frac{\partial}{\partial Q}\left(-\frac{Q^2}{2}\tan(2p) + C_1\right) = 2Q\frac{\tan(2p)}{2} = Q\tan(2p)$$

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial Q}\left(-\frac{Q^2\tan(2p)}{2} + C_1\right) = \frac{Q^2\sec^2(2p)2}{2} = \frac{Q^2}{\cos^2(2p)}$$

Tenemos:

$$Q = \sqrt{q}\cos(2p)$$

$$P = Q\tan(2p) = \frac{\sqrt{q}}{\cos(2p)}\tan(2p) = \sqrt{q}\sin(2p)$$

Como hemos llegado a las mismas expresiones, hemos mostrado que F_3 es generatriz de la transformación canónica, tomando $C_1 = 0$ sin pérdida de generalidad:

$$F_3 = -\frac{Q^2\tan(2p)}{2}$$

Problema 4: Demuestre la identidad de Jacobi: si u, v y w son tres funciones de $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, entonces:

$$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$$

Solución:

Tenemos que:

$$[w,[u,v]] = [w, \sum_i (u_{q_i} v_{p_i} - u_{p_i} v_{q_i})]$$

Como el paréntesis de poisson es lineal:

$$[w,[u,v]] = \sum_i ([w, u_{q_i} v_{p_i}] - [w, u_{p_i} v_{q_i}])$$

Por otro lado tenemos que:

$$[a,bc] = b[a,c] + c[a,b]$$

Así reescribiendo nos queda:

$$[w,[u,v]] = \sum_i (u_{q_i}[w,v_{p_i}] + v_{p_i}[w,u_{q_i}] - u_{p_i}[w,v_{q_i}] - v_{q_i}[w,v_{p_i}])$$

Como la derivada es:

$$[a,b]_{p_i} = [a_{p_i}, b] + [a, b_{p_i}]$$

podemos formar derivadas y escribir:

$$u_{q_i}[w,v_{p_i}] = u_{q_i}([w,v_{p_i}] + [w_{p_i},v] - [w_{p_i} - v])$$
$$= u_{q_i}([w,v]_{p_i} - [w_{p_i},v])$$

De manera análoga:

$$v_{p_i}[w,u_{q_i}] = v_{p_i}([w,u]_{q_i} - [w_{q_i},u])$$
$$u_{p_i}[w,v_{q_i}] = u_{p_i}([w,v]_{q_i} - [w_{q_i},v])$$
$$v_{q_i}[w,v_{p_i}] = v_{q_i}([w,u]_{p_i} - [w_{p_i} - u])$$

Reemplazando en la expresión que teníamos:

$$[w,[u,v]] = \sum_i \{ u_{q_i}([w,v]_{p_i} - [w_{p_i},v]) + v_{p_i}([w,u]_{q_i} - [w_{q_i},u])$$
$$- u_{p_i}([w,v]_{q_i} - [w_{q_i},v]) - v_{q_i}([w,u]_{p_i} - [w_{p_i},u]) \}$$

$$[w,[u,v]] = \sum_i \{ u_{q_i}[w,v]_{p_i} - u_{p_i}[w,v]_{q_i} - (v_{q_i}[w,u]_{p_i}$$
$$- v_{p_i}[w,u]_{q_i}) - u_{q_i}[w_{q_i},v] - v_{p_i}[w_{p_i},u]$$
$$+ u_{p_i}[w_{q_i},v] + v_{q_i}[w_{p_i},u] \}$$

De la derivada tenemos que:

$$u_{q_i}[w,v]_{p_i} - u_{p_i}[w,v]_{q_i} = [u,[w,v]]$$
$$v_{p_i}[w,u]_{q_i} - v_{q_i}[w,u]_{p_i} = [v,[w,u]]$$

Así nos queda:

$$[w,[u,v]] = [u,[w,v]] - [v,[w,u]] + \sum_i \Big(- u_{q_i}[w_{p_i},v] - v_{p_i}[w_{q_i},u]$$
$$+ u_{p_i}[w_{q_i},v] + v_{q_i}[w_{p_i},u] \Big)$$

Si llamamos S a la sumatoria y reemplazamos en la expresión:

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] =$$

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [u,[w,v]] - [v,[w,u]] + S =$$
$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [u,-[v,w]] - [v,[w,u]] + S =$$

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] - [u,[v,w]] - [v,[w,u]] + S = S$$

Sólo nos queda calcular la sumatoria:

$$S = \sum_i \left(-u_{q_i}[w_{p_i}, v] - v_{p_i}[w_{q_i}, u] + u_{p_i}[w_{q_i}, v] + v_{q_i}[w_{p_i}, u]\right)$$

$$S = \sum_{i,j} \Big\{ -u_{q_i}\left(w_{p_i q_j} v_{p_j} - w_{p_i p_j} v_{q_j}\right) - v_{p_i}\left(w_{q_i q_j} u_{p_j} - w_{q_i p_j} u_{q_j}\right)$$

$$+ u_{p_i}\left(w_{q_i q_j} v_{p_j} - w_{p_i p_j} v_{q_j}\right) + v_{q_i}\left(w_{q_i q_j} u_{p_j} - w_{p_i p_j} v_{q_j}\right) \Big\}$$

$$S = \sum_{i,j} \Big\{ -u_{q_i} w_{p_i q_j} v_{p_j} + u_{q_i} w_{p_i p_j} v_{q_j} - u_{p_i} w_{q_i q_j} u_{p_j} + v_{p_i} w_{q_i p_j} v_{q_j}$$

$$+ u_{p_i} w_{q_i q_j} v_{p_j} - u_{p_i} w_{p_i p_j} v_{q_j} + v_{q_i} w_{q_i q_j} u_{p_j} - v_{q_i} w_{p_i p_j} v_{q_j} \Big\}$$

Ordenando:

$$S = \left(-\sum_{i,j} u_{q_i} w_{p_i q_j} v_{p_j} + \sum_{i,j} v_{p_i} w_{q_i p_j} u_{q_j}\right) + \left(\sum_{i,j} u_{q_i} w_{p_i p_j} v_{q_j} - \sum_{i,j} v_{q_i} w_{p_i p_j} u_{q_j}\right)$$

$$+ \left(-\sum_{i,j} v_{p_i} w_{q_i q_j} u_{p_j} + \sum_{i,j} w_{q_i q_j} u_{p_i} v_{p_j}\right) + \left(-\sum_{i,j} u_{p_i} w_{p_i p_j} v_{q_j} + \sum_{i,j} v_{q_i} w_{q_i q_j} u_{p_j}\right)$$

Vemos que las sumatorias resultan términos simétricos que se anulan por lo tanto $S=0$, y finalmente como habíamos obtenido:

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = S = 0$$

Queda demostrada la identidad de Jacobi