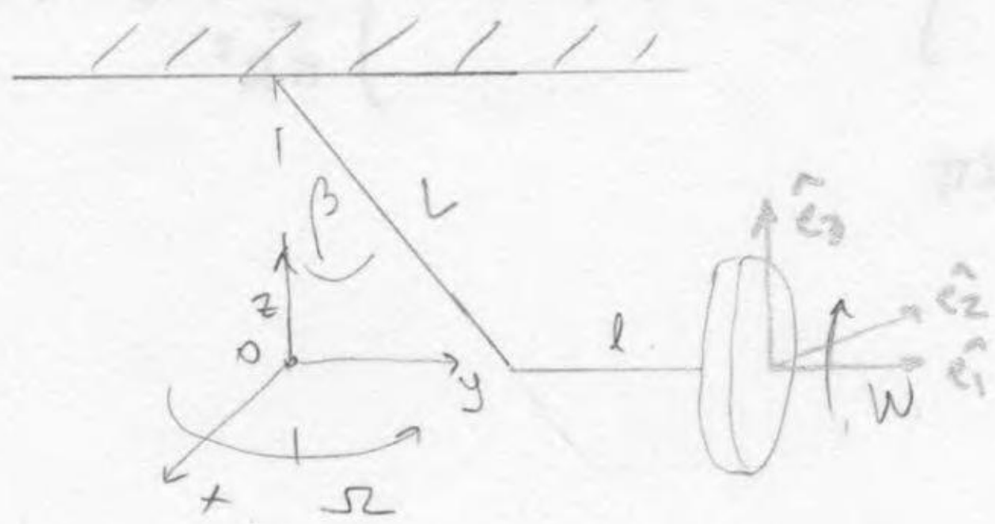
FI20222 Mecánica Clásica II

6 9

Tarea 7

problema 1: (7.3) Una rueda se encuentra en el extremo de una vara de largo $l$. El otro extremo de la vara se encuentra suspendido de una cuerda de largo $L$. La rueda es puesta en movimiento de modo que tiene precesion uniforme en el plano horizontal. La rueda es de masa $M$ y momento de inercia $I_0$ con respecto a su centro de masa. Gira con velocidad angular $\omega_s$. Las masas de la vara y cuerda son despreciables. Encontrar el angulo $\beta$ que la cuerda have con la vertical. Asumiendo que $\beta$ es pequeño, de modo que aproximaciones como $\sin\beta \approx \beta$ son justificadas.

solución:




Escribimos la velocidad angular total:

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{e}_3 + \omega \hat{e}_1$$

Primero calculamos el momento de inercia de la rueda.

$$I_2 = \int dm\left((e_2^2+e_3^2+e_1^2)\delta_{22} - e_2^2\right)$$

pero $=0$.

$$I_2 = \int e_3^2 dm = \int e_3^2 \frac{M}{\pi R^2} dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2} \rho^3 \sin^2\theta \, d\theta d\rho$$

$$I_2 = \frac{MR^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{MR^2}{4\pi}\left.\frac{\theta}{2}\right|_0^{2\pi} - \left.\frac{\sin(2\theta)}{2}\right|_0^{2\pi} = \frac{MR^2}{4\pi}\frac{2\pi}{2}$$

$$I_2 = \frac{MR^2}{4}$$

De igual modo

$$I_3 = \int dm\left((e_2^2+e_3^2+e_1^2)\delta_{33} - e_3^2\right) = \int e_2^2 \frac{M}{\pi R^2} de_2 de_3$$

$$I_3 = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_1 = \int dm\left((e_2^2+e_3^2+e_1^2)\delta_{11} - e_1^2\right) = \int (e_2^2+e_3^2)dm = \int \frac{M}{\pi R^2}(e_2^2+e_3^2)de_2de_3$$

$$I_1 = \int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2}\rho^3 d\theta d\rho = \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}2\pi$$

$$I_1 = \frac{MR^2}{2}$$

Así la matriz de inercia con respecto al centro de masa es:

$$\mathbb{I}_{CM} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Ahora usando el teorema de ejes paralelos.

$$I^{o}_{ij} = I^{CM}_{ij} + M(\bar{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

Donde $\bar{a} = a\hat{e}_1 = (L\sin\beta + l)\hat{e}_1$

Así:

$$I^{o}_{11} = I^{CM}_{11} + M(a^2\delta_{11} - a^2) = I^{CM}_{11}$$

$$I^{o}_{22} = I^{CM}_{22} + M(a^2\delta_{22} - 0) = I^{CM}_{22} + Ma^2$$

$$I^{o}_{33} = I^{CM}_{33} + M(a^2\delta_{33} - 0) = I^{CM}_{33} + Ma^2$$

Así nos queda la matriz de inercia.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1^o & 0 & 0 \\ 0 & I_2^o & 0 \\ 0 & 0 & I_3^o \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el momento angular:

$$\bar{L}_o = \mathbb{I}\,\vec{w} = \begin{pmatrix} I_1^o & 0 & 0 \\ 0 & I_2^o & 0 \\ 0 & 0 & I_3^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$= w\, I_1^o \hat{e}_1 + \Omega I_3^o \hat{e}_3$$

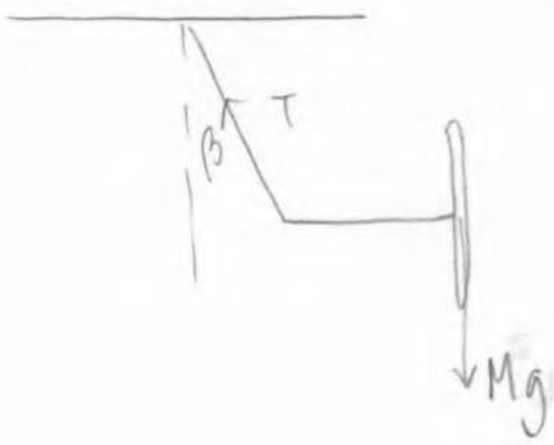
Tenemos que $\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fijo} = \underbrace{\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{cuerpo}}_{0} + \vec{w}_{sm} \times \bar{L}_o$

como $\vec{w}_{sm}$ es la velocidad con que se mueven los ejes tenemos que

$$\bar{\tau}_o = \bar{\Omega} \times \bar{L}_o = \Omega\hat{e}_3 \times (w I_1^o \hat{e}_1 + \Omega I_3^o \hat{e}_3)$$

$$= I_1^o w \Omega \hat{e}_2$$

Si ahora calculamos el torque que hacen las fuerzas.




$$\bar{\tau} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2$$

Donde $\bar{r}_1 = (L\sin\beta + l)\,\hat{e}_1 = a\,\hat{e}_1$

$\bar{F}_1 = -Mg\,\hat{e}_3$

$\bar{r}_2 = L\sin\beta\,\hat{e}_1$

$\bar{F}_2 = T\cos\beta\,\hat{e}_3$

Así $\bar{\tau} = (a\,\hat{e}_1)\times(-Mg\,\hat{e}_3) + (L\sin\beta\,\hat{e}_1)\times(T\cos\beta\,\hat{e}_3)$

$\bar{\tau} = aMg\,\hat{e}_2 - TL\sin\beta\cos\beta\,\hat{e}_2$

Por otro lado tenemos que por suma de fuerzas en $\hat{e}_3$

$T\cos\beta - Mg = M\bar{a} = 0 \Rightarrow T\cos\beta = Mg.$

Como la componente de la tensión en $\hat{e}_1$ hace una fuerza centrípeta: $\Rightarrow T\sin\beta = M\dfrac{v_1^2}{R_{giro}}$

donde $v_1 = \Omega \cdot R_{giro}$ y $R_{giro} = (L\sin\beta + l) = a$

Así $T\sin\beta = Ma\Omega^2$ (1)

Ahora igualando torque tenemos.

$I_1^{\circ}\omega\Omega = aMg - TL\sin\beta\cos\beta$ (2)

Si tomamos $\beta$ chico, aproximamos $\sin\beta \approx \beta$ y $\cos\beta \approx 1$.

Así de (1) $Mg\beta = M(L\beta + l)\Omega^2$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g\beta}{L\beta + l}} \approx \sqrt{\frac{g\beta}{l}}$$

Reemplazando en (2)

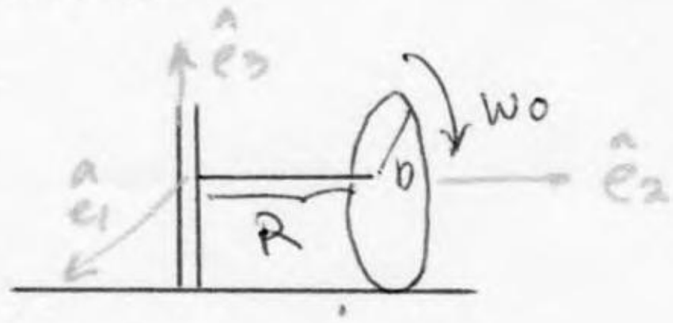
$$I_1^0 \omega \sqrt{\frac{g\beta}{l}} = M\left[(L\beta + l)g - gL\beta\right]$$

$$\beta = \frac{M^2 l^3 g}{I_0^2 \omega^2} \quad ó \quad \beta = \frac{4 l^3 g}{\omega^2 R^4}$$

7

problema2: Encontrar la fuerza de contacto si el disco es de masa M, radio b y ancho w y que rueda sin resbalar con velocidad angular $\Omega$.

solución:




La condición de rodar sin resbalar es:

$$V_{CM} = b w_0 = R\Omega$$

y la velocidad angular del disco es:

$$\vec{w} = \Omega \hat{e}_3 - w_0 \hat{e}_2$$

Usando la condición de sin resbalar

$$\vec{w} = \Omega \hat{e}_3 - \frac{R\Omega}{b} \hat{e}_2$$

El momento angular es: $L_0 = I_1 w_1 \hat{e}_1 + I_2 w_2 \hat{e}_2 + I_3 w_3 \hat{e}_3$
como sólo tenemos componente de w en $\hat{e}_3$ y $\hat{e}_2$, nos queda:

$$L_0 = I_3 w \hat{e}_3 - I_2 w \hat{e}_2$$
$$= I_3 \Omega \hat{e}_3 - I_2 \frac{R\Omega}{b} \hat{e}_2$$

Por otro lado tenemos que:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{cuerpo} + \vec{\Omega} \times \vec{L_0} \qquad \text{pero} \quad \left(\frac{dL}{dt}\right)_{cuerpo} = 0$$

Así nos queda: $\left(\frac{dL}{dt}\right) = \Omega \times \vec{L_0} = (\Omega \hat{e}_3) \times \left(I_3 \Omega \hat{e}_3 - I_2 \frac{R\Omega}{b} \hat{e}_2\right)$

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dL}{dt}\right) = -I_2 w \hat{e}_1 \Omega = -I_2 \frac{R\Omega^2}{b} \hat{e}_1$$

Calculamos ahora el torque dado por la fuerza: las fuerzas que actúan son el peso y la normal, así:

$$\bar{\tau} = (R\hat{e}_1)\times(-Mg\hat{e}_3) + (R\hat{e}_1 - b\hat{e}_3)\times(N\hat{e}_3)$$
$$\bar{\tau} = RMg\hat{e}_2 - NR\hat{e}_2$$

Igualando los torques:

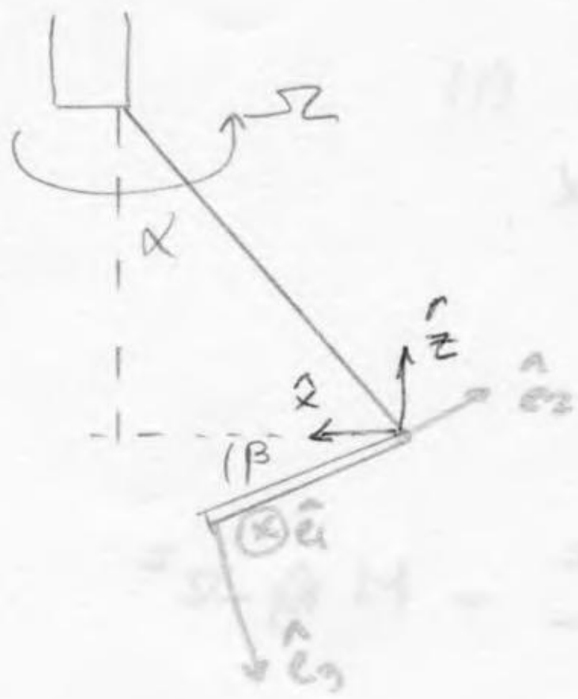
$$RMg - NR = I_2 w \Omega.$$
$$N = Mg + I_2 \frac{\Omega}{R} w \qquad \text{con } w = \frac{R\Omega}{b}.$$

$$\boxed{N = Mg + I_2 \frac{\Omega^2}{b}.}$$

Es la fuerza de contacto que ejerce la rueda sobre el piso.

7

problema 3:




tomamos las coordenadas:

$$\hat{z} = \sin\beta\, \hat{e}_2 + \cos\beta\, \hat{e}_3$$
$$\hat{x} = \cos\beta\, \hat{e}_2 - \sin\beta\, \hat{e}_3$$

luego la velocidad.

$$\vec{v}_T = \omega_3 \hat{e}_3 + \Omega \hat{z}$$
$$= \cos\beta\, \hat{e}_3 + \Omega(\cos\beta\, \hat{e}_3 + \sin\beta\, \hat{e}_2)$$
$$= (\cos\beta\, \Omega + \cos\beta)\, \hat{e}_3 + \sin\beta\, \hat{e}_2$$

los momentos de Inercia

$$I_3 = MR^2$$
$$I_2 = I_1 = \frac{1}{2} MR^2$$

El momento angular:

$$\vec{L} = \omega_2 I_2 \hat{e}_2 + \omega_3 I_3 \hat{e}_3$$

y el torque es:

$$\vec{\tau} = (R\hat{e}_2) \times (T\cos\alpha\, \hat{z} - T\sin\alpha\, \hat{x})$$
$$= (R\hat{e}_2) \times (T\cos\alpha(\cos\beta\, \hat{e}_3 + \sin\beta\, \hat{e}_2) - T(\cos\beta\, \hat{e}_2 - \sin\beta\, \hat{e}_3)\sin\alpha)$$

$$\vec{\tau} = RT\cos(\alpha+\beta)\, \hat{e}_1$$

Por otro lado:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dL}{dt}\right) = \cancel{\left(\frac{dL}{dt}\right)_{SM}}^{\,0} + \vec{\omega}_{SM} \times \vec{L}_{CM}.$$

Donde $\omega_{SM} = \Omega\, \hat{z} = \Omega(\cos\beta\, \hat{e}_3 + \sin\beta\, \hat{e}_2)$

entonces: $\vec{\omega} \times \vec{L} = \Omega(\cos\beta\, \hat{e}_3 + \sin\beta\, \hat{e}_2) \times (\omega_2 I_2 \hat{e}_2 + \omega_3 I_3 \hat{e}_3)$

$$= -\Omega\omega_2 I_2 \cos\beta + \Omega\omega_3 I_3 \sin\beta\, \hat{e}_1$$

Igualando torques.

$$R\,T\,(\cos(\alpha+\beta)) = \Omega I_3 \omega_3 \sin\beta - \Omega \omega_2 I_2 \cos\beta \quad (1)$$

pero si $\beta \approx 0$ $\cos(\alpha+\beta) \approx \cos\alpha - \beta \sin\alpha$.

Como no hay movimiento en $\hat{z}$

$$T\cos\alpha = Mg.$$

$$T\sin\alpha = F_{centripeta} = \frac{MV^2}{R_{giro}} = \frac{M R_g^2 \Omega^2}{R_g} = M R_g \Omega^2$$

$$= M R \cos\beta\, \Omega^2$$

$$T \sin\alpha \approx M R \Omega^2 (1 + O(\beta^2)) \quad (2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{Mg}{\cos\alpha}.$$

Si reemplazamos para $\beta \approx 0$ en (1).

$$RMg(1 - \beta\tan\alpha) = \Omega I_3 \omega_3 \beta - \cancel{O(\beta^2)}^{\,0}.$$

$$\beta = \frac{RMg}{RMg + g\alpha - \Omega I_3 \omega_3} = \frac{RMg}{RMg\tan\alpha + \Omega M R^2 (\Omega + \omega_s)}$$

$$\boxed{\beta = \frac{Mg}{Mg\tan\alpha + \Omega M R(\Omega + \omega_s)}}$$

$\omega_s = ?$

y de (2). $T\sin\alpha \approx M R \Omega^2 (1 + O(\beta^2))$

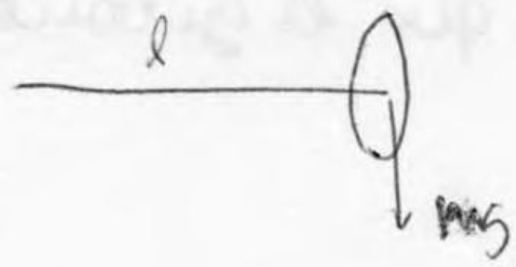
$$Mg\tan\alpha = M R \Omega^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{g\tan\alpha}{\Omega^2\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)}$$

Finalmente: $\boxed{R \approx \frac{g\tan\alpha}{\Omega^2}}$

6

problema 4:




$$L_s = I_0 \omega_s$$

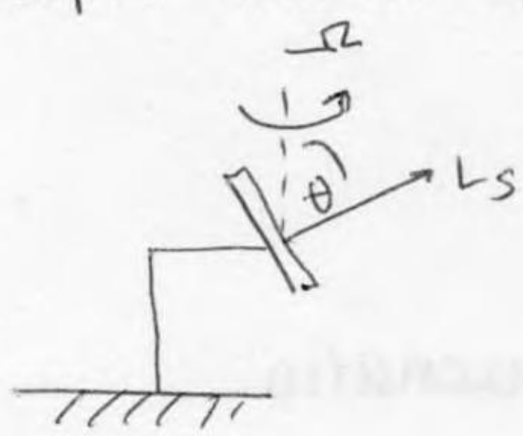
$$\bar{\tau} = l \times m\bar{g} = l\hat{x} \times -mg\hat{z}$$

$$= lmg\hat{y}$$

Por otro lado:

$$\tau = \left|\frac{dL_s}{dt}\right| = \Omega L_s = lmg \Rightarrow \Omega = \frac{lmg}{L_s} = \frac{lmg}{I_0\omega_s}\hat{z}$$

La velocidad angular $\Omega$ no depende del angulo del giroscopio con la vertical




$$L_n \rightarrow I_1\dot{\theta}$$

$$\left|\frac{dL_n}{dt}\right| = \Omega L_s \sin\theta \rightarrow \text{Precesa debido al torque.}$$

$$\frac{dL_n}{dt} = I_1\ddot{\theta} + \Omega L_s \sin\theta = 0$$

Lo anterior debido a que el eje está pivoteado. Como $L_s$ esta alineado con la vertical:

$$\ddot{\theta} + \frac{\Omega L_s}{I_\perp}\sin\theta = 0 \qquad (\theta << 1)$$

también: $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

$$\omega^2 = \frac{\Omega L_s}{I_\perp} \qquad I_{disco}\,\omega_s = L_s$$

$\theta = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

En $t=0$ tomamos $\theta = \theta_0$ si suponemos que el giroscopio se perturba. $\theta(0) = \theta_0$

entonces: $\omega = \sqrt{\dfrac{\Omega L_s}{I_\perp}}$

Tenemos los valores: $\Omega_s = 4 \cdot 10^4$ rpm.

$= 24 \cdot 10^4$ rps.

$\Omega_T = \dfrac{1}{86400}$ rps.

Para un disco delgado: $\dfrac{I_\perp}{I_s} = \dfrac{1}{2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{24 \cdot 10^4}{86400}} \sqrt{\frac{I_\perp}{I_s}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

Para que el giroscopio se mantenga estacionario:

$\theta = \lambda$ (latitud)

Así $\ddot{\theta}^{\,0} + \dfrac{\Omega L_s}{I_\perp} \sin\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{\Omega L_s}{I} \sin\lambda = 0.$

$\omega^2 \sin\lambda = 0$

Como $\sin\lambda \neq 0 \Rightarrow \omega^2 = 0$ Es la frecuencia de precesión nula (estado estacionario)

7