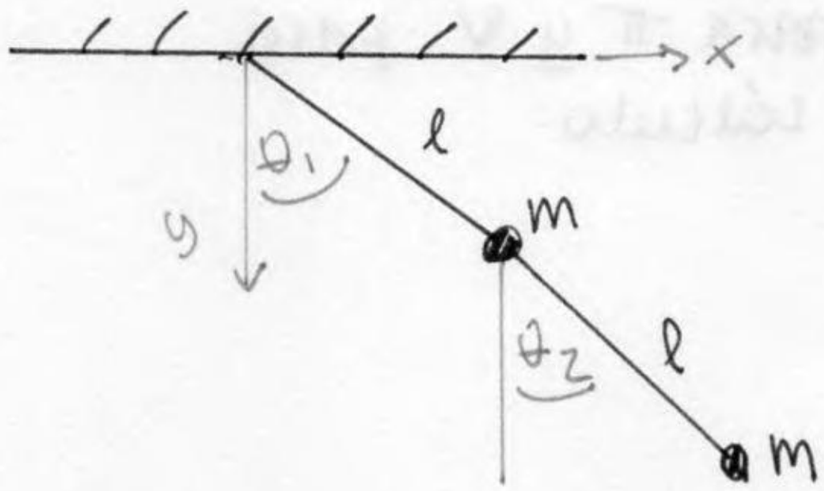
FI20222 - Mecánica Clásica 2

1) 7
2) 6.5
3)

Tarea 3: Pequeñas Oscilaciones

Ejercicio 1: Calcule las frecuencias y modos normales de las pequeñas oscilaciones del péndulo doble.
Construya la matriz Q y compruebe que diagonaliza la energía cinética y la matriz del potencial.



V=0

Escribimos la posición de ambas masas:

$$\vec{r}_1 = l\sin\theta_1\,\hat{x} + l\cos\theta_1\,\hat{y}$$
$$\vec{r}_2 = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\,\hat{x} + l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\hat{y}$$

De esto calculamos ambas velocidades:

$$\dot{\vec{r}}_1 = l\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1\,\hat{x} + -l\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1\,\hat{y}$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = l(\cos\theta_1\dot{\theta}_1 + \cos\theta_2\dot{\theta}_2)\,\hat{x} + -l(\sin\theta_2\dot{\theta}_2 + \sin\theta_1\dot{\theta}_1)\,\hat{y}$$

Elevando al cuadrado:

$$\dot{\vec{r}}_1^{\,2} = l^2\cos^2\theta_1\,\dot{\theta}_1^{\,2} + l^2(-\sin\theta_1)^2\dot{\theta}_1^{\,2} = l^2\dot{\theta}_1^{\,2}$$
$$\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = l^2(\cos^2\theta_1\dot{\theta}_1^{\,2} + \cos^2\theta_2\dot{\theta}_2^{\,2} + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2)$$
$$+ l^2(\sin^2\theta_2\,\dot{\theta}_2^{\,2} + \sin^2\theta_1\,\dot{\theta}_1^{\,2} + 2\sin\theta_2\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

$$\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = l^2\dot{\theta}_1^{\,2} + l^2\dot{\theta}_2^{\,2} + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = l^2\dot{\theta}_1^{\,2} + l^2\dot{\theta}_2^{\,2} + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como estamos considerando oscilaciones pequeñas aproximamos $\cos(\theta_1 - \theta_2) \sim 1$.

Ahora podemos escribir la energía cinética.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \dot{\vec{r}}_2^{\,2}\right) = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}_1^{\,2} + l\dot{\theta}_1^{\,2} + l^2\dot{\theta}_2^{\,2} + 2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$$

$$T = \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\theta}_1^{\,2} + \dot{\theta}_2^{\,2} + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$$

Podemos escribir directamente la matriz:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}$$

obviamos la constante 1/2 desde un comienzo para $\mathbb{T}$ y $\mathbb{V}$ para simplificar cálculo.

Ahora escribimos la energía potencial.

$$V = 2mgl\,(1-\cos\theta_1) + mgl\,(1-\cos\theta_2)$$

Como queremos hasta términos cuadráticos utilizamos la siguiente aproximación de segundo orden de taylor cerca de cero, ya θ es chico.

$$\cos\theta \approx \cos(0) + (-\sin(0))(\theta - 0) - \frac{\cos(0)}{2}(\theta-0)^2 = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Entonces el potencial nos queda:

$$V = 2mgl\left(1 - 1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right) + mgl\left(1 - 1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right) = \frac{mgl}{2}\left(2\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$$

Ahora podemos escribir la matriz del potencial:

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$$

Para encontrar las frecuencias de oscilación, buscamos ω^2 tal que $|\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}| = 0$.

Entonces tenemos que:

$$(\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}) = \begin{pmatrix} 2\omega^2 ml^2 & \omega^2 ml^2 \\ \omega^2 ml^2 & \omega^2 ml^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$$

$$(\omega^2 \mathbb{T} - \mathbb{V}) = \begin{pmatrix} 2\omega^2 l^2 m - 2mgl & \omega^2 m l^2 \\ \omega^2 m l^2 & \omega^2 m l - mgl \end{pmatrix}$$

$$|\omega^2 \mathbb{T} - \mathbb{V}| = (2\omega^2 l^2 m - 2mgl)(\omega^2 m l^2 - mgl) - (\omega^2 m l^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^2 l^2 (2\omega^2 l - 2g)(\omega^2 l - g) - m^2 l^2 (\omega^2)^2 l^2 = 0 \quad / : ml^2$$

$$(2\omega^2 l - 2g)(\omega^2 l - g) - \omega^4 l^2 = 0.$$

$$2\omega^4 l^2 - 2\omega^2 l g - 2\omega^2 l g + 2g^2 - \omega^4 l^2 = 0$$

$$\omega^4 l^2 - 4\omega^2 l g + 2g^2 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \omega^4 - 4\omega^2 \frac{g}{l} + 2\frac{g^2}{l^2} = 0$$

Si $\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}}$

$$\omega^4 - 4\omega^2 \omega_0^2 + 2\omega_0 = 0$$

Si $u = \omega^2$

$$u^2 - 4u\omega_0^2 + 2\omega_0 = 0$$

$$u = \frac{4\omega_0^2 \pm \sqrt{16\omega_0^4 - 8\omega_0^4}}{2} = \frac{4\omega_0^2 \pm 2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_1 = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Frecuencias de oscilación del sistema.

Ahora queremos calcular los vectores propios.

$$\begin{pmatrix} 2mgL - 2m\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})L & -\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})mL^2 \\ -\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})mL^2 & mgL - \frac{g}{L}(2+\sqrt{2})mL^2 \end{pmatrix} \vec{e}_1 = 0.$$

Sacando un factor.

$$mgL(1+\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\sqrt{2}\, e_1 - e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = -\sqrt{2}\, A_1$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ -\sqrt{2}\, e_1 \end{pmatrix} = e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para la otra frecuencia

$$\begin{pmatrix} 2mgL - 2m\frac{g}{L}(2-\sqrt{2})L^2 & -\frac{g}{L}(2-\sqrt{2})mL^2 \\ -\frac{g}{L}(2-\sqrt{2})mL^2 & mgL - \frac{g}{L}(2-\sqrt{2})mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$mgL(1-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

De aquí $\sqrt{2}\, e_1 = e_2$

$$\therefore \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \sqrt{2}\, e_1 \end{pmatrix} = e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Entonces $Q = [\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Entonces:

$$Q^T W Q = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2mgL & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2mgL & -\sqrt{2}mgL \\ 2mgL & \sqrt{2}mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mgL+2mgL & 2mgL-2mgL \\ 2mgL-2mgL & 2mgL+2mgL \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4mgL & 0 \\ 0 & 4mgL \end{pmatrix}$$

Vemos que diagonaliza a W.

$$Q^T T Q = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

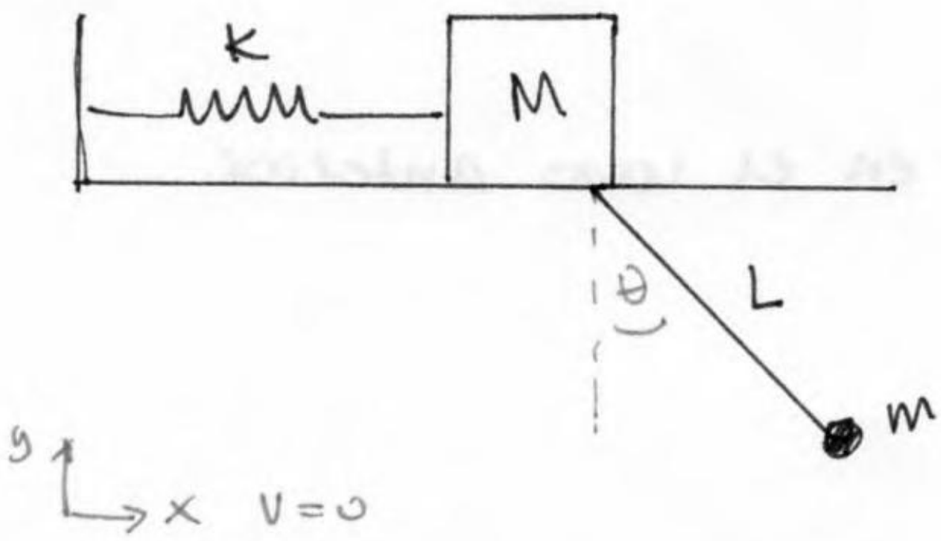
$$= \begin{pmatrix} 2mL^2-\sqrt{2}mL^2 & mL^2-\sqrt{2}mL^2 \\ 2mL^2+\sqrt{2}mL^2 & mL^2+\sqrt{2}mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4mL^2-2\sqrt{2}mL^2 & 0 \\ 0 & 4mL^2+2\sqrt{2}mL^2 \end{pmatrix}$$

Vemos que diagonaliza a T

7

Ejercicio 2: Calcular de igual modo que en el ejercicio 1.



Escribimos las posiciones:

del bloque M:

$\vec{r_1} = x\,\hat{x}$

del pendulo:

$\vec{r_2} = (x + L\sin\theta)\,\hat{x} + L\cos\theta\,\hat{y}$

Calculamos las velocidades:

$\dot{\vec{r_1}} = \dot{x}\,\hat{x}$

$\dot{\vec{r_2}} = (\dot{x} + L\cos\theta\,\dot{\theta})\,\hat{x} + -L\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y}$

La energía cinética nos queda:

$T = (m/2)(\dot{\vec{r_2}}^2) + (M/2)\dot{\vec{r_1}}^2$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + L^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2) + \frac{M}{2}\dot{x}^2$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2) + \frac{M}{2}\dot{x}^2$

como son oscilaciones pequeñas tomamos $\cos\theta \sim 1$, nos queda:

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L + L^2\dot{\theta}^2) + \frac{M}{2}\dot{x}^2$

y así podemos escribir la matriz $\mathbb{T}$, sin contar el 1/2 para simplificar calculo (tanto para $\mathbb{T}$ como $\mathbb{V}$).

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} (m+M) & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix}$$

Ahora escribimos la energía potencial:

$$V = MgL + mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2$$

Haciendo la misma aproximación que en el caso anterior
$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

La energía potencial queda:

$$V = MgL + mgL\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}kx^2$$

Podemos escribir la matriz:

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix}$$

Del mismo modo que en el ejercicio anterior, buscamos ω^2 tal que $|\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}| = 0$.
Entonces:

$$(\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}) = \begin{pmatrix} \omega^2(m+M) - K & \omega^2 mL \\ \omega^2 mL & \omega^2 mL^2 - mgL \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es:

$$|\omega^2\mathbb{T} - \mathbb{V}| = (\omega^2(m+M) - K)(\omega^2 mL^2 - mgL) - (\omega^2 mL^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad mL(\omega^2(m+M) - K)(\omega^2 L - g) - m^2L^2(\omega^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\omega^2(m+M) - K)(\omega^2 L - g) - mL(\omega^2)^2 = 0.$$

$$\omega^4(Lm + LM - mL) - \omega^2(g(m+M) + KL] + Kg = 0.$$

$$\omega^4(ML) - \omega^2(g(m+M) + KL) + Kg = 0.$$

De este modo podemos escribir las frecuencias.

$$w_1 = \left[\frac{(g(m+M)+kL) + \sqrt{(g(m+M)+kL)^2 - 4MLkg}}{2ML} \right]^{1/2}$$

$$w_2 = \left[\frac{(g(m+M)+kL) - \sqrt{(g(m+M)+kL)^2 - 4MLkg}}{2ML} \right]^{1/2}$$

Ahora queremos diagonalizar las matrices, primero buscamos los vectores propios:

Lo podemos escribir como:

$$w^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML}$$

Es decir:

$$w_1^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML}, \quad w_2^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML}.$$

Si buscamos los vectores propios.

$$\begin{pmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML}(M+m) - k & \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML} mL \\ \frac{a + \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML} mL & \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4MLkg}}{2ML} mL^2 - mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, si decimos $w_1^2 = w$

$$\begin{pmatrix} (m+M)w - k & mLw \\ w & wL - g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W(M+m)-K & mLW \\ mLW & WL^2m-mgL \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(W(m+M)-K)e_1 + e_2 mLW = 0$$
$$mW e_1 + e_2(WLm-mg) = 0.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$W m e_1 + W m L_1 - e_1 K + e_2 m L W = 0$$
$$m e_1 + e_2 W L m - e_2 m g = 0.$$

$$W M e_1 - e_1 K + e_2 m L W - e_2 W L m + e_2 m g = 0.$$
$$e_1(WM-K) - e_2(mg) = 0.$$

$$e_1 = -\frac{e_2 mg}{WM-K} = \frac{e_2 mg}{K-WM}$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_1M} \\ 1 \end{pmatrix}$$ con $W_1 = \omega_1^2$ hallado anteriormente.

De modo analogo el otro vector es:

$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_2M} \\ 1 \end{pmatrix}$$ con $W_2 = \omega_2^2$ hallado anteriormente.

De este modo:

$$Q = [\vec{e_1} \quad \vec{e_2}] = \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_1M} & \frac{mg}{K-W_2M} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que diagonaliza:

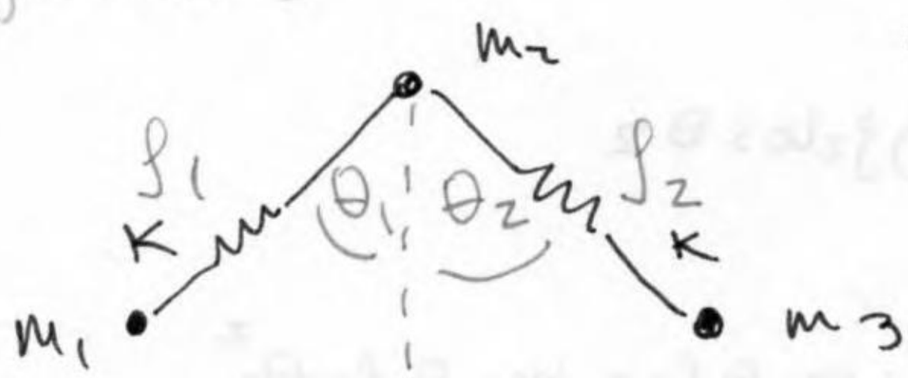
$$Q^T \Pi Q = \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_1M} & 1 \\ \frac{mg}{K-W_2M} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m+M) & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_1M} & \frac{mg}{K-W_2M} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que diagonaliza.

$$Q^T \mathbb{V} Q = \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_1M} & 1 \\ \frac{mg}{K-W_2M} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mg}{K-W_1M} & \frac{mg}{K-W_2M} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

65.

Ejercicio 3:



Si consideramos como si m_2 estuviera en el origen.

La posición de la maza 1:

$$\vec{r_1} = -\rho_1 \sin(\theta_1)\hat{x} - \rho_1 \cos(\theta_1)\hat{y}$$
$$\dot{\vec{r_1}} = -\dot{\rho}_1 \sin(\theta_1)\hat{x} - \rho_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 \hat{x} - \dot{\rho}_1 \cos(\theta_1)\hat{y} + \rho_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 \hat{y}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r_1}}^2 = \dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

La posición de la masa 3:

$$\vec{r_2} = \rho_2 \sin(\theta_2)\hat{x} - \rho_2 \cos(\theta_2)\hat{y}$$

$$\dot{\vec{r_2}} = \dot{\rho}_2^2 \sin^2\theta_2 + \rho^2 \cos^2\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\rho}_2 \rho_2 \sin\theta_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2$$
$$+ \dot{\rho}_2^2 \cos^2\theta_2 + \rho_2^2 \sin^2\theta_2 \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\rho}_2 \rho_2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\vec{r_2}}^2 = \dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

Entonces la energía cinética nos queda:

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2\right) + \frac{m_3}{2}\left(\dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2\right)$$

Así la matriz

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\rho_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3\rho_2^2 \end{pmatrix}$$

La energía potencial:

$$V = \frac{K\rho_1^2}{2} + \frac{K}{2}\rho_2^2 + m_1 g \rho_1 \cos(\theta_1) + m_2 g \rho_2 \cos\theta_2$$

aproximando:

$$V = \frac{K\rho_1^2}{2} + \frac{K}{2}\rho_2^2 + m_1 \rho_1 g - \frac{m_1 g \rho_1 \theta_1^2}{2} + m_2 g \rho_2 - \frac{m_2 g \rho_2 \theta_2^2}{2}.$$