FIZ0222 - Mecánica Clásica II

6.2

Tarea 4:

Problema 1: Suponiendo que el potencial $V(x)$ es una función par, encuentre el potencial, si el período de las oscilaciones a energía E está dado por,

$$T(E) = b\sqrt{E}$$

para $E \geq 0$. Repita el cálculo anterior para $T(E) = bE^n$, $n > 0$.

Solución:

Por el teorema de Abel, tenemos que:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \frac{T(E)}{\sqrt{V-E}}\, dE$$

Reemplazando:

$$x(V) = \frac{b}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^V \sqrt{\frac{E}{V-E}}\, dE$$

, ahora sólo falta calcular la integral.

haciendo el cambio de variable

$$u = \sqrt{V-E}$$

tenemos si $E = 0$, $u = \sqrt{V}$ y $du = \frac{-dE}{2\sqrt{V-E}} = \frac{-dE}{2u}$

$E = V$, $u = 0$

$$x(V) = \frac{b}{2\pi\sqrt{2m}} \int_{\sqrt{V}}^{0} \frac{\sqrt{V-u^2}}{u} \cdot -2u\, du = \frac{-b}{\pi\sqrt{2m}} \int_{\sqrt{V}}^{0} \sqrt{V-u^2}\, du$$

Ahora hacemos otro cambio de variable:

$$u = \sqrt{V}\sin\theta$$

tenemos que si $u = \sqrt{V}$, $\theta = \pi/2$ y $du = \sqrt{V}\cos\theta\, d\theta$

$u = 0$, $\theta = 0$

Entonces:

$$x(V) = \frac{-b}{\pi\sqrt{2m}} \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{V - V\sin^2\theta} \cdot \sqrt{V}\cos\theta \, d\theta = -\frac{bV}{\pi\sqrt{2m}} \int_{\pi/2}^{0} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$x(V) = \frac{bV}{\pi\sqrt{2m}} \int_{0}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta$$

$$x(V) = \frac{bV}{\pi\sqrt{2m}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right] \Bigg|_{0}^{\pi/2}$$

$$x(V) = \frac{bV}{\pi\sqrt{2m}} \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4} \right) - \frac{\sin(0)}{4} \right]$$

$$x(V) = \frac{bV}{\pi\sqrt{2m}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Despejando $\quad V(x) = \dfrac{4\sqrt{2m}}{b} x$

- Ahora para $T(E) = bE^n$, tenemos que reemplazando en la fórmula de Abel:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_{0}^{V} \frac{bE^n}{\sqrt{V-E}} \, dE$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$E = E_0 V$

$dE = V \, dE_0$

Entonces si $\quad E = 0, \; E_0 = 0$

$E = V, \; E_0 = 1$

Nos queda:

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^1 \frac{b\, E_0^{\,n} V^n V}{\sqrt{V - E_0 V}}\, dE_0$$

$$x(V) = \frac{b}{2\pi\sqrt{2m}} V^{n+1/2} \int_0^1 \frac{E_0^{\,n}}{\sqrt{1-E_0}}\, dE_0$$

$$x(V) = \frac{b}{2\pi\sqrt{2m}} V^{n+1/2} \int_0^1 E_0^{\,n} (1-E_0)^{-1/2}\, dE_0.$$

Por otro lado, sabemos que la función Beta. esta definida por:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt$$

Vemos que podemos escribir $x(V)$ como:

$$x(V) = \frac{b}{2\pi\sqrt{2m}} V^{n+1/2} \beta(n+1, 1/2)$$

y además $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, tendremos:

$$x(V) = \frac{b}{2\pi\sqrt{2m}} V^{n+1/2} \frac{\Gamma(n+1)\,(1/2)}{\Gamma(n+3/2)}$$

y como: $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin(n\pi)}$

$$x(V) = \frac{b\, V^{n+1/2}}{2\pi\sqrt{2m}} \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \qquad (1)$$

donde Γ es la función gamma.

Problema 2: Repita el problema anterior, para el caso en que

$$T(E) = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E+U_0}} \quad \text{en que } U_0 > 0$$

Solución:

De modo similar, reemplazando en la fórmula de Abel.

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^V \frac{T(E)}{\sqrt{V-E}}\,dE = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^V \frac{\pi}{\alpha}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E+U_0}}\cdot\frac{dE}{\sqrt{V-E}}$$

$$x(V) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^V \frac{dE}{\sqrt{(E+U_0)(V-E)}}$$

Factorizamos: $(E+U_0)(V-E) = VU_0 + E(V-U_0) - E^2$

$$= \left(\frac{V+U_0}{2}\right)^2 - \left[E - \left(\frac{V-U_0}{2}\right)\right]^2$$

De esto hacemos el siguiente cambio de variable:

$$E - \left(\frac{V-U_0}{2}\right) = \left(\frac{V+U_0}{2}\right)\sin\theta$$

Entonces si $E=0$, $\sin\theta = \left(\frac{U_0-V}{U_0+V}\right) \Rightarrow \theta_0 = \text{Arcsin}\left(\frac{U_0-V}{U_0+V}\right)$

Si $E=V$, $\frac{2V-V+U_0}{2} = \left(\frac{V+U_0}{2}\right)\sin\theta$

$$\frac{V+U_0}{2} = \frac{V+U_0}{2}\sin\theta$$

$$1 = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/2$$

y $dE = \left(\frac{V+U_0}{2}\right)\cos\theta\, d\theta$

Reemplazando en la integral:

$$x(V) = \frac{1}{2\alpha}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\left(\frac{V+U_0}{2}\right)\cos\theta\, d\theta}{\left(\frac{V+U_0}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$x(V) = \frac{1}{2\alpha}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta$$

$$x(V) = \frac{1}{2\alpha}\,\theta\Big|_{\theta_0}^{\pi/2}$$, reemplazando el θ_0 ya hallado.

$$x = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{U_0-V}{U_0+V}\right)\right)$$

Ahora tenemos que despejar V.

$$x = \frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\,\text{Arcsin}\left(\frac{U_0-V}{U_0+V}\right)$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4\alpha}\right).\,2\alpha = -\,\text{Arcsin}\left(\frac{U_0-V}{U_0+V}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} - 2\alpha x = \text{Arcsin}\left(\frac{U_0-V}{U_0+V}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha x\right) = \frac{U_0-V}{U_0+V}$$

Calculamos:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(2\alpha x) - \sin(2\alpha x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(2\alpha x)$$

Entonces:

$$\cos(2\alpha x) = \frac{U_0 - V}{U_0 + V}$$

$$\cos(2\alpha x)U_0 + \cos(2\alpha x)V = U_0 - V$$

$$U_0(\cos(2\alpha x) - 1) = -V(\cos(2\alpha x) + 1)$$

Finalmente: $$\frac{U_0(1 - \cos(2\alpha x))}{(1 + \cos(2\alpha x))} = V(x).$$

1

Problema 3: Determine la sección eficaz diferencial de scattering de partículas por un potencial central de la forma:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad \text{en que} \quad \alpha > 0$$

Solución:

Por conservación de Energía:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m r^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{\alpha}{r^2} = E \quad (1)$$

y por conservación de momento angular:

$$m r^2 \dot{\theta} = l \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{l}{m r^2}$$

Tenemos que $\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dr}{dt}} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}$

De (1), tenemos que:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

De (2), tenemos que:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{m r^2}$$

Entonces nos queda:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{l}{m r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

integramos, desde infinito a r_{min}.

Tenemos:

$$\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{d\theta}{dr} \cdot dr = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{l}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}\, dr$$

$$\theta(r_{min}) - (\theta(\infty)) = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{l}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}\, dr$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{l}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}\, dr$$

Donde, $E = \frac{1}{2} m v_\infty^2$ y $l = m v_\infty b$, por conservacion.

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{m v_\infty b}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{m v_\infty^2}{2} - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{m^2 v_\infty^2 b^2}{2mr^2}\right)}}\, dr$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{v_\infty b}{r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} v_\infty^2 \cdot \frac{m}{2}\left(1 - \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}\frac{1}{r^2} - \frac{b^2}{r^2}\right)}}\, dr$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{b}{r^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\alpha}{m v_\infty^2} + b^2\right)\frac{1}{r^2}}}$$

Si hacemos $C_0 = \frac{2\alpha}{m v_\infty^2} + b^2$, vemos que $[C_0] = m^2$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{b}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{C_0}{r^2}}}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$s = \frac{1}{r} \Rightarrow ds = -\frac{dr}{r^2}$$

y tambien si $r = r_{min}$, $s = s_{max}$

$r = \infty$, $s = 0$

Nos queda:

$$\varphi = \int_0^{s_{max}} \frac{b\,ds}{\sqrt{1-C_0 s^2}} = \int_0^{s_{max}} \frac{b\,ds}{\sqrt{C_0\left(\frac{1}{C_0} - s^2\right)}}$$

Ahora con el siguiente cambio de variable:

$$s = \frac{1}{\sqrt{C_0}} \sin\theta \Rightarrow ds = \frac{1}{\sqrt{C_0}} \cos\theta\, d\theta$$

Si $s = 0$, $\theta = 0$.

Si $s = s_{max}$, se cumple: $1 - C_0 s_{max}^2 = 0$

Entonces: $\frac{1}{\sqrt{C_0}} = s_{max} = \frac{1}{\sqrt{C_0}} \sin\theta$, es decir $\theta = \pi/2$

La integral queda:

$$\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{b \cdot \frac{1}{\sqrt{C_0}} \cos\theta\, d\theta}{\sqrt{C_0\left(\frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_0}\sin^2\theta\right)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{b}{\sqrt{C_0}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{b}{\sqrt{C_0}}\, d\theta$$

Finalmente:

$$\varphi = \frac{b}{\sqrt{C_0}}\,\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{b}{\sqrt{C_0}}\,\frac{\pi}{2}$$

Por otro lado:

$$\Theta = \pi - 2\varphi = \pi - \frac{\pi b}{\sqrt{C_0}}$$

De aquí: $\pi - \Theta = \frac{\pi b}{\sqrt{C_0}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{C_0}}{\pi}\left(\pi - \Theta\right)$

Entonces: $\frac{db}{d\Theta} = -\frac{\sqrt{C_0}}{\pi}$ C_0 depende de b

La sección eficaz es:

$$\left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| = \left|\frac{b}{\sin\left(2\pi - \frac{\pi b}{\sqrt{C_0}}\right)} \cdot \frac{-\sqrt{C_0}}{\pi}\right|,$$ donde $\sin\left(2\pi - \frac{\pi b}{\sqrt{C_0}}\right) = -\sin\left(\frac{\pi b}{\sqrt{C_0}}\right)$ porque es impar de periodo 2π.

$$\left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| = \frac{b}{\sin\left(\frac{\pi b}{\sqrt{C_0}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{C_0}}{\pi}$$

0.7

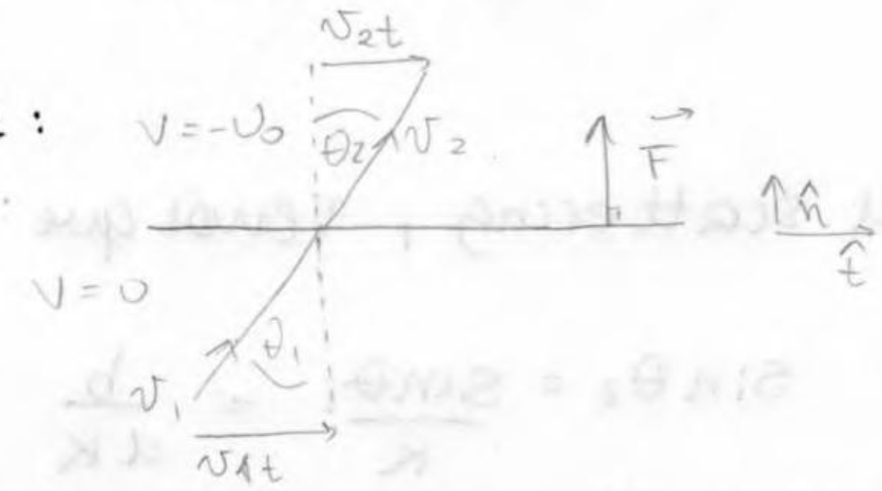
con $C_0 = \frac{2\alpha}{m v_\infty^2} + b^2$

problema 4: Encuentre la sección eficaz de scattering por un pozo potencial esférico de radio a y profundidad U_0 (i.e., un campo $V=0$ para $r>a$, $V=-U_0$ para $r<a$)

Solución:

Tenemos: $$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r>a \\ -U_0 & \text{para } r<a \end{cases}$$

Considerando el esquema:



Cuando una partícula pasa de una región sin potencial a la región con potencial $-U_0$, experimenta un fuerza en dirección normal, entonces es evidente que la velocidad en la dirección tangencial no cambia.

$$v_1 t = v_2 t$$

$$v_1 \cdot \sin\theta_1 = v_2 \cdot \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Por otro lado se conserva la energía, es decir:

$$E_i = \frac{m v_1^2}{2} = E_f = \frac{m v_2^2}{2} - U_0$$

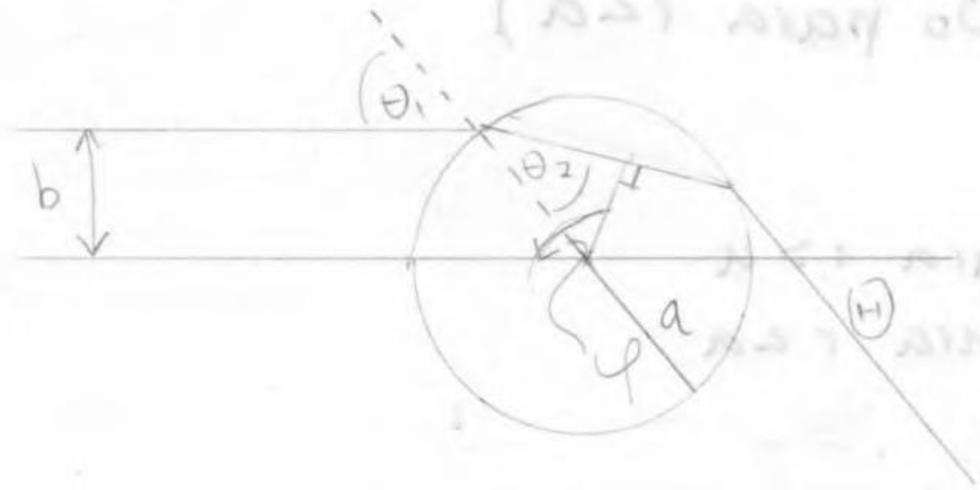
De aquí tendremos que:

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = 1 + \frac{2U_0}{m v_1^2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v_1^2}}$$

Que podemos expresarlo como:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{U_0}{E}} = \sqrt{\frac{E+U_0}{E}} = K$$

Así $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = K = \sqrt{\dfrac{E+V_0}{E}} = \dfrac{v_2}{v_1}$



Es el equema del scattering, vemos que:

$$\sin\theta_1 = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{K} = \frac{b}{aK}$$

Por otro lado:

$$(\varphi - \theta_1) + \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Así $\varphi = \frac{\pi}{2} + (\theta_1 - \theta_2)$, también tenemos que:

$$\Theta + \pi = 2\varphi \quad \text{así} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}$$

De esto último, primero tenemos que

$$\sin(\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Segundo $\sin(\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}\right)$

Igualando:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_1 - \theta_2)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}\right)$$

De la primera parte: de (1)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_1 - \theta_2)\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cancel{\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0}$$

$$= \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Como teníamos que $\sin\theta_1 = \frac{b}{a}$, tendremos que $\cos(\theta_1) = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

y del mismo modo con $\sin\theta_2 = \frac{b}{ak} \Rightarrow \cos(\theta_2) = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2k^2}}$

Así:

$$\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2k^2}} + \frac{b^2}{a^2k}$$

... sea $y = \cos(\theta_1-\theta_2) = \sin(\varphi)$, tendremos que

$$a^2ky - b^2 = \sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2k^2-b^2}$$
$$a^4k^2y^2 - 2a^2b^2ky = a^4k^2 - a^2b^2 - a^2b^2k^2$$

$$b^2(1+k^2-2ky) = a^2k^2(1-y^2) \quad (2)$$

Por otra parte, del segundo lado de la igualdad en (1), tenemos que:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}$$
$$= \cos\frac{\theta}{2}.$$

Así vemos que de la igualdad (1),

$$\sin(\varphi) = y = \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\frac{\theta}{2}$$

Reemplazando en (2):

$$b^2 = \frac{a^2k^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+k^2-2k\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

Ahora derivamos con respecto a θ para obtener $\frac{db}{d\theta}$

$$2b\frac{db}{d\Theta} = \frac{a^2k^2\left(\sin(\Theta/2)\cos(\Theta/2)\left(1+k^2-2n\cos(\Theta/2)-k\sin^3(\Theta/2)\right)\right]}{\left(1+k^2-2n\cos(\Theta/2)\right)^2}$$

Así

$$b\frac{db}{d\Theta} = \frac{a^2k^2\sin\Theta}{4\cos(\Theta/2)} \cdot \frac{\left(k\cos(\Theta/2)-1\right)\left(k-\cos(\Theta/2)\right)}{\left(1+k^2-2k\cos(\Theta/2)\right)^2}$$

Así, finalmente la sección eficaz de scattering es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\Theta}\cdot\frac{db}{d\Theta}\right| = \frac{k^2a^2}{4\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \cdot \frac{\left(k\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)-1\right)\left(k-\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right)}{\left(1+k^2-2k\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right)^2} \quad (1)$$

con $k = \sqrt{\frac{E+U_0}{E}}$

Problema 5: Repita el problema 3 para potenciales de la forma
$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$

Solución:

Del mismo modo que en el problema 3, vamos a llegar a:

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{l}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{l^2}{mr^2} - V(r)\right)}}\, dr$$

De donde es necesario analizar para que valores de α y β $V(r) > 0$ ó $V(r) < 0$.

Si reemplazamos $V(r)$, nos queda:

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{l}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{l^2}{mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r}\right)}}\, dr$$

Donde $l = mv_\infty b$ y $E = \frac{1}{2} m v_\infty^2$ por conservación

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{m v_\infty b}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2} m v_\infty^2 - \frac{m^2 v_\infty^2 b^2}{mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r}\right)}}\, dr$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{m v_\infty b}{mr^2}}{\left[\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2} m v_\infty^2\right)\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{\alpha \cdot 2}{m v_\infty^2 r^2} + \frac{2\beta}{m v_\infty^2 r}\right)\right]^{1/2}}\, dr$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{\frac{b}{r^2}}{\left[1 - \left(b^2 + \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}\right)\frac{1}{r^2} + \left(\frac{2\beta}{m v_\infty^2}\right)\frac{1}{r}\right]^{1/2}}\, dr$$

Aquí lo importante de analizar es:

$C_1 = b^2 + \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}$, donde $C_1 > 0$ si $\alpha > -b^2 \frac{m v_\infty^2}{2}$

$C_1 < 0$ si $\alpha < -b^2 \frac{m v_\infty^2}{2}$.

y $C_2 = \frac{2\beta}{m v_\infty^2}$, donde $C_2 > 0$ si $\beta > 0$

$C_2 < 0$ si $\beta < 0$.

Para el caso que $C_1, C_2 > 0$, tendremos:

$$\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{r}}}\, dr$$

0.5

Problema 6: Determine la sección eficaz total de caída de partículas en el centro de un campo. $V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$

Solución:

Por conservación de momento, tenemos que:

$$m v_\infty r = m v r_{min}$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_\infty r}{r_{min}} \quad (1)$$

Ahora:

$V_{eff} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\alpha}{r^2}$ y el $V_{eff} = E = \frac{1}{2} m v_\infty^2$, determina que este dentro del campo.

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\alpha}{r^2} \quad (2)$$

De (1) en (2), tendremos que:

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m \frac{v_\infty^2 r^2}{r^2_{min}} - \frac{\alpha}{r^2_{min}}$$

Despejando r_{min}:

$$r_{min} = \sqrt{r^2 - \frac{2\alpha}{m v_\infty^2}}$$

Ahora la condición para que caiga dentro del campo, es que $r_{min} = 0$ (que caiga en el centro del campo)

Así obtenemos $r_{max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m v_\infty^2}}$

Entonces la sección eficaz total corresponde al area de la sección circular de radio r_{max}, es decir:

$$\sigma = \pi r_{max}^2 = \frac{\pi 2\alpha}{m v_{\infty}^2} \quad (1)$$

Donde v_{∞} es la velocidad que tiene en el infinito.