FI20222 Mecánica Clásica II

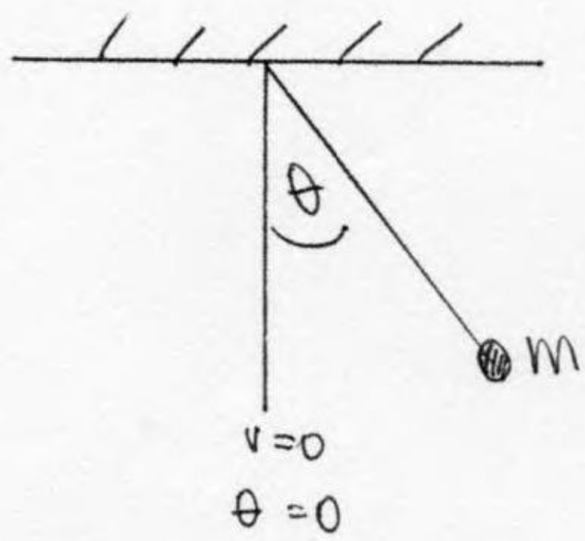
Tarea 6

6.9

problema 1:

(a) Demuestre que la energía de un péndulo simple está dado por $E = J\nu$ (J variable angular de acción) cuando se have la aproximación de ángulos pequeños.

Solución:



$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m v^2 - V = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

Asi primero escribimos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

Hacemos $q = \theta$, $\dot{q} = \dot{\theta}$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m l^2 \dot{\theta} = m l^2 \dot{q}$$

Entonces

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L}$$

$$H = \frac{p\dot{q}}{2} + mgl(1-\cos q)$$

Si havemos la aproximación de oscilaciones pequeñas:

$\cos q = 1 - \frac{q^2}{2} - \dots$

$$H = \frac{p\dot{q}}{2} + mgl\frac{q^2}{2} \qquad (2)$$

de (1) tenemos que: $\dot{q} = \frac{p}{ml^2}$, reemplazando en (2):

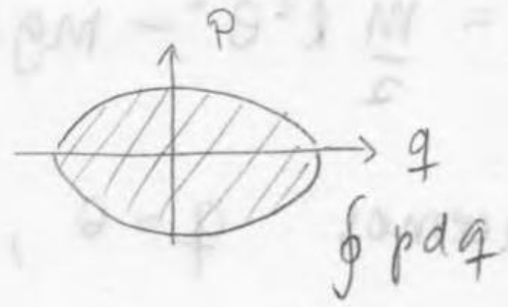
$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl}{2} q^2$$

Como H no depende de t, tenemos que: $H = E$
Así tenen

$$E = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl}{2} q^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{p^2}{(\sqrt{2Eml^2})^2} + \frac{q^2}{(\sqrt{2E/mgl})^2}$$

Vemos que esto es la ecuación de una elipse:



Si consideramos las variables angulares de acción:
$J = \oint p\,dq = \pi ab$ que corresponde al area de la elipse.

Entonces:

$$J = \pi\sqrt{2Eml^2}\sqrt{\frac{2E}{mlg}}$$

$$\Rightarrow J = \pi\, 2E\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3)$$

Por otro lado: $v = \frac{\partial E}{\partial J}$

Despejando E de (3):

$$E = \frac{J\sqrt{g/l}}{2\pi}$$

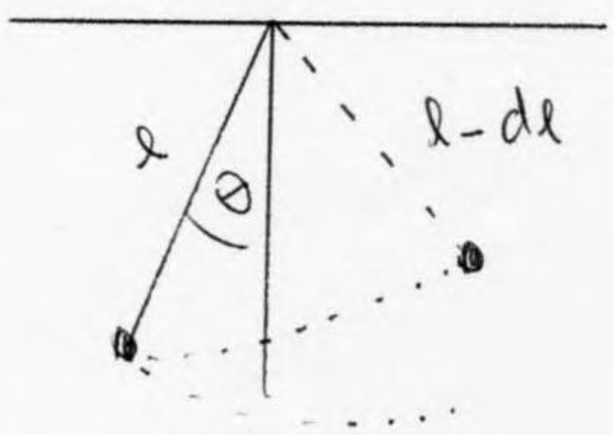
$$v = \frac{\partial E}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (4)$$

Finalmente de (3) y (4).

$$J \cdot v = \pi 2E\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = E.$$

(b) Considere el péndulo anterior y suponga que acorta lentamente el largo de la cuerda (por ejemplo lo tira a través de un orificio). Esto es muy lento comparado con el periodo del péndulo de modo que puede hablar del periodo del péndulo. Calcule el cambio de energía que experimenta el péndulo, a partir del trabajo realizado para acortar la cuerda. Demuestre que la variable de acción $J = E/\nu$ se mantiene constante en este proceso. Es entonces lo que se llama invariante adiabático.

Solución:



Como el largo varía muy lento:

(1) $T\frac{dl}{dt} << l$ T: periodo del péndulo.

Ahora bien como l varía, la energía no es constante, y hay un trabajo contra la gravedad y la fuerza centrípeta, lo cual esta dado por:

(2) $dw = -mg\overline{\cos\theta}\,dl - ml\overline{\dot{\theta}^2}\,dl$

Donde la barra indica que es el promedio temporal, es decir, se toma durante el periodo del movimiento

Cuando el péndulo alcanza su nueva longitud, el trabajo es:

(3) $dw = -mg\,dl + dE$

Donde $-mg\,dl$ corresponde al cambio de energía potencial debido a la nueva posición y dE es el cambio de energía del péndulo

Si hacemos una aproximación de oscilaciones pequeñas, es decir $\cos\theta \sim 1-\frac{\theta^2}{2}$, en (2) y usando (3):

(4) $dE = \frac{mg\bar{\theta}^2}{2} dl - ml\bar{\dot{\theta}^2} dl$ y sabemos que:

$\frac{E}{2} = \frac{ml^2}{2}\bar{\dot{\theta}^2} = \frac{mgl}{2}\bar{\theta}^2$ por el teorema del virial.

Así reemplazando en (4).

(5) $dE = \frac{-E}{2l} dl = \frac{dE}{E} = -\frac{1}{2}\frac{dl}{l}$

Integrando lo anterior:

(6) $E\, l^{1/2} = cte.$

Para el péndulo simple, la frecuencia ν es proporcional a $l^{-1/2}$

$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

Finalmente (6) tenemos que:

$\frac{E}{\nu} = cte = J$ y a esta relación se le conoce como invariante adiabática.

7

problema 2: Considere una transformación infinitesimal que consiste en una rotación $\delta\theta$ en torno al eje z:

$$\delta x = -y\,\delta\theta \qquad \delta p_x = -p_y\,\delta\theta$$
$$\delta y = x\,\delta\theta \qquad \delta p_y = p_x\,\delta\theta$$

(a) Demuestre que la transformación anterior es una rotación infinitesimal en torno al eje z.

Solución:

Tenemos que para rotaciones infinitesimales, se cumple que:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\theta} \times \vec{r}$$
$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

sea $\vec{r}_1 = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

Al hacer una rotación en torno al eje z:

$$\vec{r}_2 = (x+\delta x)\hat{\imath} + (y+\delta y)\hat{\jmath}$$

Por enunciado: $\delta x = -y\,\delta\theta$
$\delta y = x\,\delta\theta$

Así $\vec{r}_2 = (x - y\,\delta\theta)\hat{\imath} + (y + x\,\delta\theta)\hat{\jmath}$

Por lo que: $\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -y\,\delta\theta\,\hat{\imath} + x\,\delta\theta\,\hat{\jmath}$

$\Delta\theta = \delta\theta\,\hat{k}$

Por otro lado: $\Delta\vec{\theta} \times \vec{r} = \delta\theta\,\hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$
$= x\,\delta\theta\,\hat{\jmath} - y\,\delta\theta\,\hat{\imath} = \Delta\vec{r}$

Sea $\bar{p}_1 = p_x \hat{\imath} + p_y \hat{\jmath}$

$$\bar{v}_1 = \frac{p_x}{m} \hat{\imath} + \frac{p_y}{m} \hat{\jmath}$$

Entonces:

$$\bar{p}_2 = (p_x + \delta p_x)\hat{\imath} + (p_y + \delta p_y)\hat{\jmath}$$

$$\bar{p}_2 = (p_x - p_y \delta\theta)\hat{\imath} + (p_y + p_x \delta\theta)\hat{\jmath}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{(p_x - p_y \delta\theta)}{m} \hat{\imath} + \frac{(p_y + p_x \delta\theta)}{m} \hat{\jmath}$$

Por lo que:

$$\Delta \bar{v} = \frac{p_x \delta\theta}{m} \hat{\jmath} - \frac{p_y \delta\theta}{m} \hat{\imath} = v_x \delta\theta \hat{\jmath} - v_y \delta\theta \hat{\imath} \quad (1)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\bar{\theta}}{dt} = \frac{\delta\theta}{dt} \hat{z}$$

Entonces: $\bar{\omega} \times \bar{r} = \frac{\delta\theta}{dt} \hat{z} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = x \frac{\delta\theta}{\delta t} \hat{\jmath} - y \frac{\delta\theta}{dt} \hat{\imath}$

$$= v_x \delta\theta \hat{\jmath} - v_y \delta\theta \hat{\imath} \quad (2)$$

Vemos que la ecuación 1 es igual a la ecuación 2.

Por lo que: $\bar{\omega} \times \bar{r} = \Delta \bar{v}$

Entonces es una rotación infinitesimal en torno al eje z.

(b) Encuentre el generado $G[q,p]$

Solución:

Tenemos que: $\delta x = \delta\theta \frac{\partial G}{\partial p_x} = -y\,\delta\theta$

$$\delta y = \delta\theta \frac{\partial G}{\partial p_y} = x\,\delta\theta$$

$$\delta p_x = -\delta\theta \frac{\partial G}{\partial x} = -p_y\,\delta\theta$$

$$\delta p_y = -\delta\theta \frac{\partial G}{\partial y} = p_x\,\delta\theta$$

Entonces:

$$\frac{\partial G}{\partial p_x} = -y \Rightarrow G = -y p_x + \phi(x, y, p_y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_y} = \frac{\partial \phi}{\partial p_y} = x \Rightarrow \phi = x p_y + \varphi(x,y)$$

$$G = x p_y - y p_x + \varphi(x,y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = p_y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = p_y \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

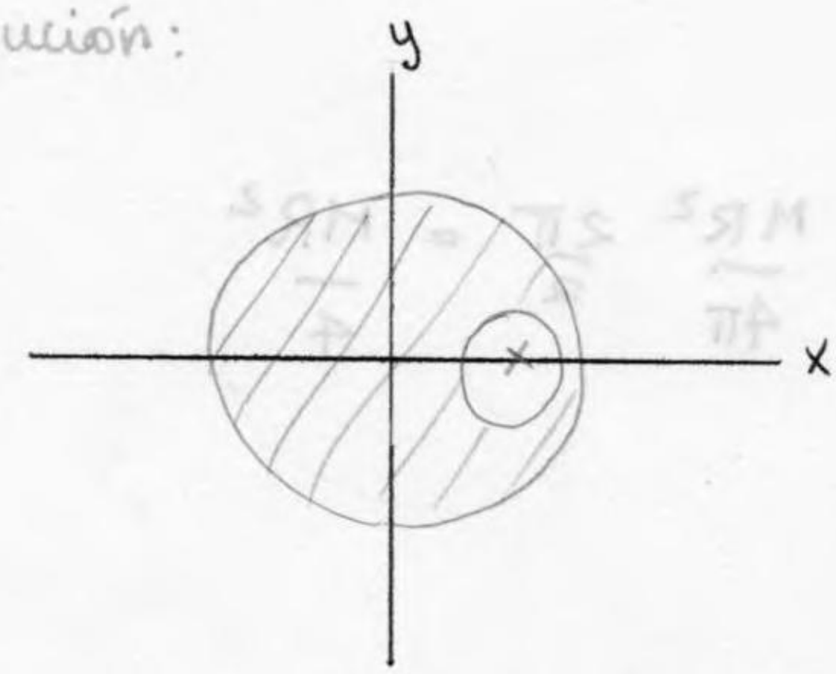
$$G = x p_y - y p_x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -p_x + \frac{d\varphi}{\partial y} = -p_x \Rightarrow \frac{d\varphi}{dy} = 0 \Rightarrow \varphi = cte. = C$$

Finalmente: $G(x, y, p_x, p_y) = \underbrace{x p_y - y p_x}_{= L_z} + C$

problema 3: Calcule la matriz de inercia I_{ij} de una placa delgada en forma circular de radio R con un hueco de radio "a" $(2a < R)$ excéntrico.

Solución:



Primero vamos a calcular el momento de inercia del círculo grande y luego el del círculo chico.

Para el círculo grande:

Tenemos que $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

La fórmula para calcular el momento de inercia es:

$$I_{ij} = \int dm\,(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)$$

Así:

$$I_{11} = I_{xx} = \int dm\,((x^2+y^2+z^2)\delta_{11} - x^2)$$

$$I_{xx} = \int (y^2+z^2)\,dm$$

pero $z=0$ porque la placa está en el plano:

$$I_{xx} = \int y^2\,dm$$

Si tomamos que la placa tiene una densidad de masa uniforme

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} = \frac{dm}{dA} \Rightarrow I_{xx} = \int y^2 \frac{M}{\pi R^2}\,dA$$

Así tenemos: calculando la integral:

$$I_{xx} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2} \rho^3 \sin^2\theta \, d\theta d\rho$$

$$I_{xx} = \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$I_{xx} = \frac{MR^2}{4\pi} \left[\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} - \cancel{\frac{\sin(2\theta)}{2}}^{\,0}\Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{MR^2}{4\pi} \frac{2\pi}{2} = \frac{MR^2}{4}$$

Finalmente $I_{xx} = \frac{MR^2}{4}$

Por simetría de la figura $I_{yy} = I_{xx}$ y como estamos usando los ejes de simetría $I_{xy} = 0$, $I_{xz} = 0$, $I_{yz} = 0$

$I_{yx} = 0$, $I_{zx} = 0$, $I_{zy} = 0$

vamos a calcularlos para comprobar que es así:

$$I_{12} = I_{xy} = \int dm \left((x^2+y^2+z^2)\delta_{12} - xy \right) = -\int xy \, dm$$

$$I_{xy} = -\frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\theta d\rho.$$

$$I_{xy} = -\frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = -\frac{MR^2}{4\pi} \cdot \cancel{\frac{\sin^2\theta}{2}}^{\,0}\Big|_0^{2\pi}$$

Vemos que $I_{xy} = 0$ y como $I_{xy} = I_{yx}$

$\Rightarrow I_{yx} = 0$

Para $I_{13} = I_{xz} = \int dm \left((x^2+y^2+z^2)\delta_{13} - xz \right) = \int dm \cdot xz$

como $z = 0$ porque la placa esta en el plano:

$I_{xz} = \int 0 \, dm = 0$

como $I_{zx} = I_{xz} \Rightarrow I_{zx} = 0$

Para I_{23}:

$$I_{23} = I_{yz} = \int dm\left((x^2+y^2+z^2)\delta_{23} - yz\right) = -\int yz\, dm$$

como $z=0$

$I_{yz}=0$ y como $I_{zy} = I_{yz} \Rightarrow I_{zy}=0.$

Ahora calculamos I_{yy}

$$I_{22} = I_{yy} = \int dm\left((x^2+y^2+z^2)\delta_{22} - y^2\right) = \int (x^2+y^2+z^2-y^2)\,dm$$

como $z=0$

$$I_{yy} = \int x^2\, dm = \int x^2 \frac{M}{\pi R^2}\, dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2} \rho^3 \cos^2\theta\, d\theta\, d\rho$$

$$I_{yy} = \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{MR^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$I_{yy} = \frac{MR^2}{4\pi}\left[\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} + \cancel{\frac{\sin(2\theta)}{2}\Big|_0^{2\pi}}^{\,0}\right] = \frac{MR^2}{4\pi}\frac{2\pi}{2}$$

Finalmente $I_{yy} = \frac{MR^2}{4}$ como habíamos predicho.

Ahora calculamos I_{zz}:

$$I_{33} = I_{zz} = \int dm\left((x^2+y^2+z^2)\delta_{33} - z^2\right)$$

$$I_{zz} = \int (x^2+y^2)\, dm = \int \frac{M}{\pi R^2}(x^2+y^2)\, dx\,dy$$

$$I_{zz} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi R^2} \rho^3\, d\theta\, d\rho$$

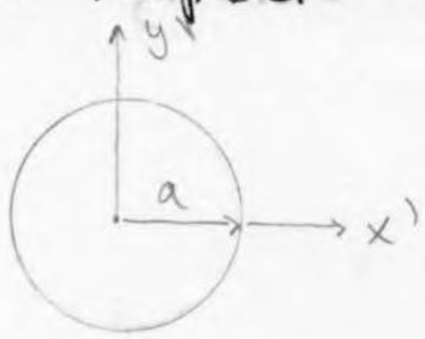
$$I_{zz} = \frac{M}{\pi R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi = \frac{MR^2}{2}$$

Finalmente: $I_{zz} = \frac{MR^2}{2}$

Ahora calculamos el del circulo pequeño, si éste tiene otra masa m, de la misma densidad superficial uniforme. Debe cumplirse que:

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} = \frac{m}{\pi a^2} \Rightarrow m = M\frac{a^2}{R^2}$$

De manera análoga al procedimiento para el circulo grande, para el circulo chico, tendremos los momentos de inercia con respecto a su centro de masa:



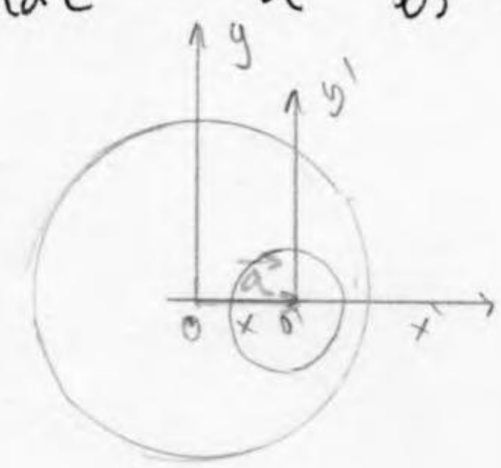
$$I_{oxx} = \frac{ma^2}{4}, \quad I_{oyy} = \frac{ma^2}{4}, \quad I_{ozz} = \frac{ma^2}{2}$$

$$I_{oxy} = I_{oyx} = I_{oyz} = I_{ozy} = I_{oxz} = I_{ozx} = 0$$

Ahora para tener el momento de inercia total, debemos usar el teorema de los ejes paralelos para poder restar los momentos con respecto a un mismo eje.
Así el teorema de los ejes paralelos nos dice:

$$I_{ij} = I_{oij} + m(a^2\delta_{ij} - a_{ij}).$$

Donde $\vec{a}$ es la distancia entre los dos ejes.



$$\vec{a} = h\hat{x} + 0\cdot\hat{y} + 0\hat{k}$$

donde $h > 0$ para que el circulo chico sea excéntrico y $h < R-a$ para que cumpla con el enunciado.

Así usando el teorema de los ejes paralelos:

$$I_{11} = I_{xx} = I_{oxx} + m(h^2\delta_{11} - h^2)$$

$$I_{xx} = I_{oxx} = \frac{ma^2}{4}$$

$$I_{22} = I_{yy} = I_{oyy} + m(h^2\delta_{22} - h\hat{x}\cdot o\hat{y})$$

$$I_{yy} = I_{oyy} + mh^2$$

$$I_{yy} = \frac{ma^2}{4} + mh^2$$

$$I_{33} = I_{zz} = I_{ozz} + m(h^2\delta_{33} - o\hat{k}\cdot o\hat{k})$$

$$I_{zz} = I_{ozz} + mh^2$$

$$I_{zz} = \frac{ma^2}{2} + mh^2$$

Ahora:

$$I_{12} = I_{xy} = I_{21} = I_{yx} = I_{oxy} + m(h^2\delta_{12} - h\hat{x}\cdot o\hat{y})$$
$$= 0$$

$$I_{13} = I_{xz} = I_{31} = I_{zx} = I_{oxz} + m(h^2\delta_{13} - h\hat{x}\cdot o\hat{k})$$
$$= 0$$

$$I_{23} = I_{32} = I_{yz} = I_{zy} = I_{oyz} + m(h^2\delta_{23} - o\hat{y}\cdot o\hat{k})$$
$$= 0$$

A modo resumen:

La matriz inercia círculo grande es:

$$\mathbb{I}_g = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix}$$

y la matriz círculo chico es:

$$\mathbb{I}_c = \begin{pmatrix} ma^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2/4 + mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/2 + mh^2 \end{pmatrix}$$

Así el momento total de inercia es:

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_g - \mathbb{I}_c$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} MR^2/4 - ma^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 - ma^2/4 - mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 - ma^2/2 - mh^2 \end{pmatrix}$$

Si tomamos que $m = M\dfrac{a^2}{R^2}$ podemos factorizar:

$$\frac{MR^2}{4} - \frac{ma^2}{4} = \frac{MR^2}{4} - \frac{Ma^4}{4R^2} = \frac{M}{4}\left(R^2 - \frac{a^4}{R^2}\right) = \frac{M}{4R^2}\left(R^4 - a^4\right)$$

y $$\frac{MR^2}{4} - \frac{ma^2}{4} - mh^2 = \frac{MR^2}{4} - \frac{Ma^4}{4R^2} - \frac{Ma^2h^2}{R^2} = \frac{M}{4R^2}\left(R^4 - a^4 - 4a^2h^2\right)$$

Así finalmente la matriz queda:

$$\mathbb{I} = \frac{M}{4R^2}\begin{pmatrix} R^4 - a^4 & 0 & 0 \\ 0 & R^4 - a^4 - 4a^2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^4 - 2a^4 - 4a^2h^2 \end{pmatrix}$$

problema 4: En un sistema xyz, la matriz inercia de un cuerpo es:

$$I = \begin{pmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 10 & 60 & 0 \\ -10 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

Encuentre su valor en el sistema de ejes principales y encuentre los ejes principales $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.

solución:

Primero calculamos los valores propios:

$$\det \begin{vmatrix} 20-\lambda & 10 & -10 \\ 10 & 60-\lambda & 0 \\ -10 & 0 & 80-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(20-\lambda)(60-\lambda)(80-\lambda) - 100(80-\lambda) - 100(60-\lambda) = 0$$

$$(20-\lambda)(60-\lambda)(80-\lambda) - 100(140-2\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 160\lambda^2 - 7400\lambda + 82000 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 16{,}153 \\ \lambda_2 = 62{,}097 \\ \lambda_3 = 81{,}749 \end{cases}$$

Ahora calculamos los vectores propios:

Para $\lambda = 16.153$

$$\begin{pmatrix} 3.847 & 10 & -10 \\ 10 & 43.87 & 0 \\ -10 & 0 & 63.847 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 6.384 \\ -1.456 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 62,097$

$$\begin{pmatrix} -42,097 & 10 & -10 \\ 10 & -2,097 & 0 \\ -10 & 0 & 17.903 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.7902 \\ 8.53658 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 81.749$

$$\begin{pmatrix} -61.749 & 10 & -10 \\ 10 & -21.749 & 0 \\ -10 & 0 & -1.749 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} -0.1749 \\ -0.0804 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de los valores en el eje vertical es.

$$A = \begin{pmatrix} 16.153 & 0 & 0 \\ 0 & 62.097 & 0 \\ 0 & 0 & 81.749 \end{pmatrix}$$

y:

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 6.384 \\ -1.456 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1.4902 \\ 8.536 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.174 \\ -0.08 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Faltó normalizar.

6.5