FI20222 - Mecánica clásica II

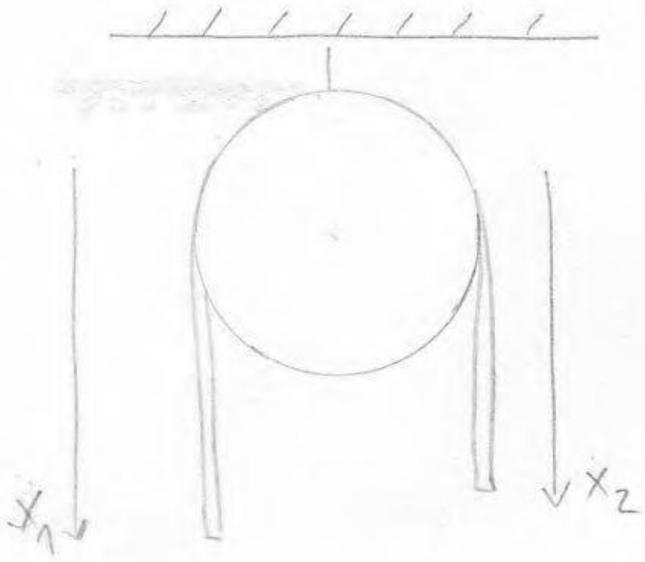
1) 6.5

Tarea 1

Ejercicio 1:

Considere una cuerda de largo L y densidad de masa uniforme ρ sobre una polea sin masa. (No hay masas m_1 y m_2 amarradas a la cuerda)

a) Use el principio de D'Alembert para encontrar la aceleración de un extremo de la cuerda.



El principio de D'Alembert:

$$\delta W' = \sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i' = 0$$

Donde $\delta \vec{r}_i'$ son compatibles a las fuerzas de ligadura, por lo que no consideramos la contribución de las fuerzas de ligadura

Tenemos que $\vec{F}_1 = \rho x_1 g \hat{x}$ y $\vec{F}_2 = \rho x_2 g \hat{x}$

$\vec{a}_1 = \ddot{x}_1 \hat{x}$ $\quad$ $\vec{a}_2 = \ddot{x}_2 \hat{x}$

Además que $x_1 + x_2 = L$

Usando el principio de D'Alembert:

$$\delta W' = (\rho x_1 g \hat{x} - \rho x_1 \ddot{x}_1 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (\rho x_2 g \hat{x} - \rho x_2 \ddot{x}_2 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_2' = 0$$

Que es equivalente a

$$\delta W' = (x_1 g \hat{x} - x_1 \ddot{x}_1 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (x_2 g \hat{x} - x_2 \ddot{x}_2 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_2' = 0$$

$\delta \vec{r}_1'$ y $\delta \vec{r}_2'$ son desplazamientos virtuales compatibles

$\delta \vec{r}_1' = \delta x_1 \hat{x}$ y $\delta x_1 + \delta x_2 = 0$

$\delta \vec{r}_2' = \delta x_2 \hat{x}$ $\Rightarrow$ $\delta x_2 = -\delta x_1$

$$\delta W' = (x_1 g \hat{x} - x_1 \ddot{x}_1 \hat{x}) \cdot (\delta x_1 \hat{x}) + (x_2 g \hat{x} - x_2 \ddot{x}_2 \hat{x})(\delta x_2 \hat{x}) = 0$$

usando que $\delta x_2 = -\delta x_1$

$$\delta W' = (x_1 g - x_1 \ddot{x}_1) \cdot (\delta x_1) + (x_2 g - x_2 \ddot{x}_2)(-\delta x_1) = 0$$

y como δx_1 es arbitrario

$$(x_1 g - x_1 \ddot{x}_1) + (x_2 g - x_2 \ddot{x}_2) = 0$$

$$g(x_1 - x_2) - x_1 \ddot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_2 = 0$$

Como $x_1 + x_2 = L \Rightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

Queda:

$$g(x_1 - x_2) - \ddot{x}_1 (x_1 + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = g\frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)}$$

Lo dejamos en función de x_1

$$\ddot{x}_1 = g\frac{(2x_1 - L)}{L}$$

Nos queda la función diferencial en x_1

$$\ddot{x}_1 - \frac{2g}{L} x_1 = -g$$

La solución a la homogenea:

$$\ddot{x}_1 - \frac{2g}{L} x_1 = 0$$

$$\left(D^2 - \frac{2g}{L} D^0\right)(x) = 0$$

Del polinomio característico:

$$p(D) = D^2 - \frac{2g}{L} \Rightarrow \text{raíces: } D = \pm\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$$x_1(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}, \quad C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}$$

Llamamos $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

Una solución particular:

$$(D^2 - \omega^2)(x) = -g \quad / \cdot D$$
$$D(D^2-\omega^2)(x) = 0.$$

$\Rightarrow$ solución particular satisface

$$D(x)=0.$$
$$x_p(t) = K = cte.$$

Buscamos K:

La solución general es:

$$x_1(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + K$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}_1(t) = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t}$$
$$\ddot{x}_1(t) = C_1 \omega^2 e^{\omega t} + C_2 \omega^2 e^{-\omega t}$$

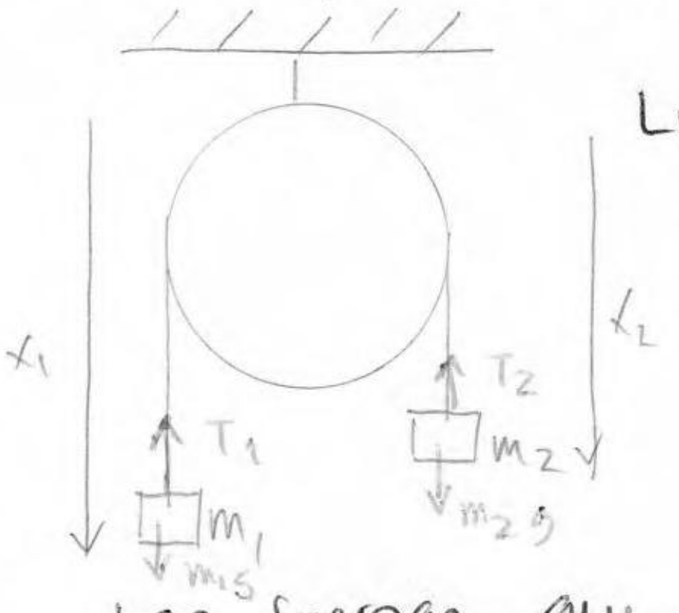
Reemplazando en la ecuación diferencial

$$(C_1 \omega^2 e^{\omega t} + C_2 \omega^2 e^{-\omega t}) - \omega^2 (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + K) = -g$$
$$-\omega^2 K = -g$$
$$-K \cdot \frac{2g}{L} = -g$$
$$\Rightarrow K = \frac{L}{2}$$

La ecuación de movimiento:

$$x_1(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{L}{2}, \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

(b) Verifique el resultado de (a) resolviéndolo por otro método:



Lo pensamos como dos masas en la polea de modo que

$m_1 = \rho x_1$

$m_2 = \rho x_2$

$F = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x}$

con masa variable

Las fuerzas que actúan son: la tensión y el peso.

para m_1:

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$-T_1 \hat{x} + m_1 g \hat{x} = m_1 \ddot{x}_1 \hat{x}$$

$$-T_1 \hat{x} + \rho x_1 g \hat{x} = \rho x_1 \ddot{x}_1 \hat{x} \quad (1)$$

Para m_2 análogamente:

$$-T_2 \hat{x} + \rho x_2 g \hat{x} = \rho x_2 \ddot{x}_2 \hat{x} \quad (2)$$

Como las tensiones son iguales

Reemplazamos T_1 de (1) en (2)

$$\cancel{\rho} x_1 \ddot{x}_1 \hat{x} - \cancel{\rho} x_1 g \hat{x} + \cancel{\rho} x_2 g \hat{x} = \cancel{\rho} x_2 \ddot{x}_2 \hat{x}$$

Que es equivalente a:

$$x_1 \ddot{x}_1 - x_1 g + x_2 g = x_2 \ddot{x}_2$$

$$x_1 \ddot{x}_1 - x_2 \ddot{x}_2 + g(x_2 - x_1) = 0$$

Como la cuerda es ideal: $x_1 + x_2 = L$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 (x_1 + x_2) + g(x_2 - x_1) = 0$$

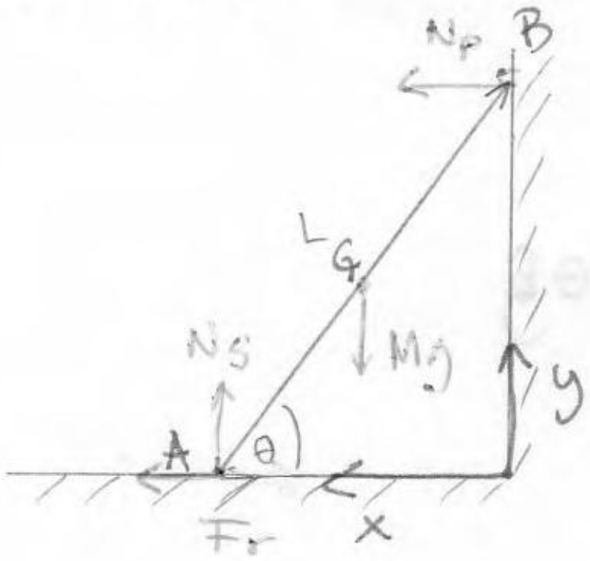
$$\ddot{x}_1 = \frac{g(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)} = g\left(\frac{2x_1 - L}{L}\right)$$

Vemos que se verifica.

Que es la misma ecuación diferencial que ya resolvimos.

Ejercicio 2:

Una escalera de largo L y masa M se encuentra apoyada sobre una pared, formando un ángulo θ con el suelo. Use el principio de los trabajos virtuales para encontrar las fuerzas que ejercen el suelo y la pared sobre la escalera.



El principio de los trabajos virtuales

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i' = 0$$

Donde $\vec{F}_i$ es la fuerza aplicada, sin incluir las de ligazón cuando $\delta \vec{r}_i'$ es compatible con ésta.

Tenemos que:

- Si hacemos un desplazamiento horizontal, no es necesario considerar N_s, nos queda:

$$(F_r \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (-Mg\hat{y}) \cdot \delta \vec{r}_2' + (N_p \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_3' = 0 = \delta W$$

como $\delta \vec{r}_1'$, $\delta \vec{r}_2'$ y $\delta \vec{r}_3'$ son compatibles

$\delta \vec{r}_1' = \delta \vec{r}_2' = \delta \vec{r}_3' = \delta x \, \hat{x}$, donde δx es arbitrario.

$$(F_r \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) + (-Mg\hat{y}) \cdot (\delta x \hat{x}) + (N_p \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) = 0$$

$F_r \delta x + N_p \delta x = 0$, como δx es arbitrario

$\Rightarrow -N_p = F_r$

- Si realizamos un desplazamiento vertical, no es necesario considerar N_p, queda:

$$(F_r \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (-Mg\hat{y}) \cdot \delta \vec{r}_2' + (N_s \hat{y}) \cdot \delta \vec{r}_3' = 0$$

donde $\delta \vec{r}_1' = \delta \vec{r}_2' = \delta \vec{r}_3' = \delta y \hat{y}$, con δy arbitrario

$$(F_r \hat{x}) \cdot (\delta y \hat{y}) + (-Mg\hat{y}) \cdot (\delta y \hat{y}) + (N_s \hat{y}) \cdot (\delta y \hat{y}) = 0$$

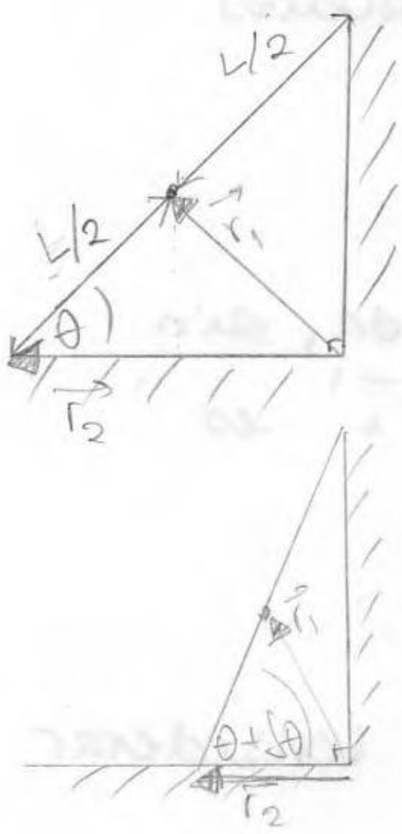
$-Mg\delta y + N_s \delta y = 0$, como δy es arbitrario

$\Rightarrow N_s = Mg$

Por último realizamos un desplazamiento en θ, entonces no será necesario considerar ninguna de las normales, porque el desplazamiento es compatible con ambas restricciones, queda:

$$(-Mg\hat{y})\cdot\delta\vec{r}_1' + (Fr\,\hat{x})\cdot\delta\vec{r}_2' = 0$$

Donde $\vec{r}_1 = \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{x} + \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{y}$



$$\Rightarrow \delta\vec{r}_1' = -\frac{L}{2}\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\delta\theta\,\hat{y}$$

donde $\delta\theta$ es arbitrario.

$$\vec{r}_2 = L\cos\theta\,\hat{x}$$
$$\delta\vec{r}_2' = -L\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x}$$

Queda:

$$(-Mg\,\hat{y})\cdot\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\delta\theta\,\hat{y}\right) + (Fr\,\hat{x})\cdot(-L\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x}) = 0$$

$$-\frac{MgL}{2}\cos\theta\,\delta\theta - Fr\,L\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

como $\delta\theta$ es arbitrario

$$-\frac{Mg\cancel{L}}{2}\cos\theta = Fr\,\cancel{L}\sin\theta$$

$$Fr = -\frac{Mg}{2}\,\mathrm{ctn}(\theta)$$

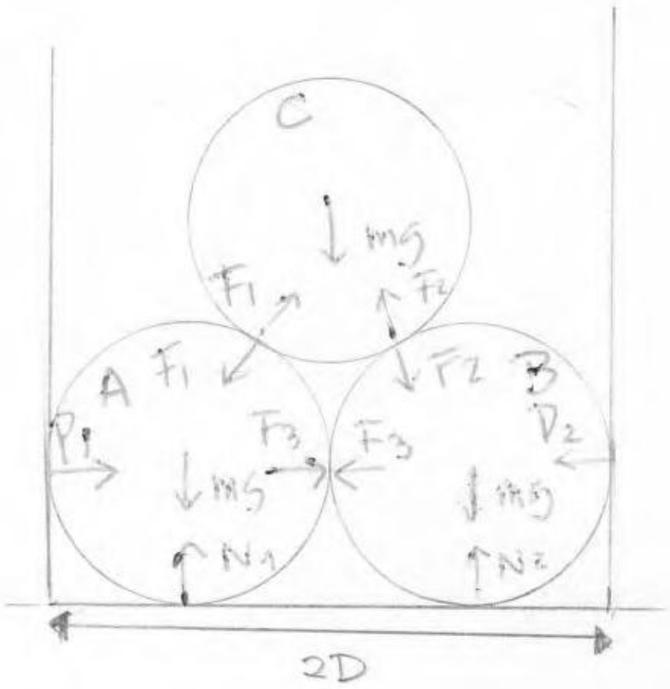
Finalmente obtenemos:

$$\vec{N}_s = Mg\,\hat{y} \quad , \quad \vec{N}_p = \frac{Mg}{2}\,\mathrm{ctn}(\theta)\,\hat{x}$$

$$\vec{Fr} = -\frac{Mg}{2}\,\mathrm{ctn}(\theta)\,\hat{x}$$

Ejercicio 3:

Tenemos dos paredes verticales separadas por una distancia 2D. En el espacio entre las paredes hay dos cilindros de radio D/2 cada uno, apoyados sobre el suelo. Sobre ellos descansa otro cilindro de radio D/2 (descansa en la hendidura) Calcule la fuerza entre los cilindros y las fuerzas que hacen las paredes y el suelo sobre los cilindros.



Si utilizamos el principio de los trabajos virtuales.

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i' = 0$$

Donde $\delta \vec{r}_i'$ es consistente con las fuerzas de ligadura.

Si hacemos un desplazamiento horizontal, solo consideremos las fuerzas P_1 y P_2

$$(P_1 \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) + (-P_2 \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) = 0 \quad , \text{ como } \delta x \text{ es arbitrario}$$

$$P_1 - P_2 = 0 \quad \Rightarrow P_1 = P_2$$

Si hacemos un desplazamiento vertical, no consideramos las fuerzas entre los cilindros.

$$(N_1 \hat{y}) \cdot (\delta y \hat{y}) + (N_2 \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) = 0$$

$$N_1 \delta y + N_2 \delta y - 3mg \delta y = 0 \quad , \text{ como } \delta y \text{ es arbitrario}$$

$$N_1 + N_2 - 3mg = 0.$$

Si 'desplazamos' el cilindro A, verticalmente:

$$(N_1 \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 \hat{y}\right)(\delta y \hat{y}) = 0$$

$$N_1 \delta y - mg \delta y - \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 \delta y = 0 \quad \text{como } \delta y \text{ es arbitrario.}$$

$$N_1 - mg - \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 = 0.$$

Si 'desplazamos' el cilindro A horizontalmente:

$$(P_1 \hat{x})(\delta x \hat{x}) + \left(-\frac{1}{2} F_1 \hat{x}\right)(\delta x \hat{x}) + (-\hat{x})(\delta x \hat{x}) = 0.$$

Como δx es arbitrario:

$$P_1 - \frac{1}{2} F_1 - F_3 = 0$$

Si 'desplazamos' el cilindro C horizontalmente:

$$\left(\frac{1}{2} F_1 \hat{x}\right)(\delta x \hat{x}) + \left(\frac{1}{2} F_2 \hat{x}\right)(\delta x \hat{x}) = 0$$

Como δx es arbitrario $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{2} F_2 = 0$

$$F_1 = F_2$$

Si 'desplazamos' el cilindro C verticalmente:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 \hat{y}\right)(\delta y \hat{y}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} F_2 \hat{y}\right)(\delta y \hat{y}) + (-mg\hat{y})(\delta y \hat{y}) = 0$$

Como δy es arbitrario:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 - mg = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 + F_2) = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_1 = F_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}}}$$

De las ecuaciones anteriores.

$$N_1 = mg + \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 = \frac{3}{2} mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1 = \frac{3}{2} mg}$$

$$N_1 + N_2 = 3mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2 = \frac{3}{2} mg}$$

Si asumimos que $F_3 = 0$

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} mg$$

Ejercicio 4:

Encuentre el periodo del oscilador $x'' + f(x) = 0$, donde $f(x) = x$ si $x \leq 1$, $f(x) = x + r(1-x)$ si $x > 1$ donde el parámetro $r > 0$. Exprese el periodo en términos de la amplitud A del movimiento y del parámetro r.

Para $x \leq 1$

Nos queda $x'' + x = 0$

Cuya solución es del tipo:

$$x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$$

Para el segundo caso:

$$x'' + x(1-r) = -r$$

La solución a la ecuación homogenea para $0 < r < 1$ es:

$$x(t) = K_1 \cos(\sqrt{1-r}\, t) + K_2 \sin(\sqrt{1-r}\, t)$$

para $r \geq 1$.

$$x(t) = k \cdot e^{\sqrt{r-1}\, t}$$

Y una solución particular es: $x(t) = \frac{r}{r-1}$

La solución queda.

$$x(t) = \begin{cases} C_1 \cos(t) + C_2 \sin t & x \leq 1 \\ K_1 \cos(\sqrt{1-r}\, t) + K_2 \sin(\sqrt{1-r}\, t) + \frac{r}{r-1} & x > 1,\ 0 < r < 1 \\ k\, e^{\sqrt{r-1}\, t} + \frac{r}{r-1}, & x > 1,\ r \geq 1 \end{cases}$$

FI20222 - Mecánica Clásica II
Tatiana Tapia

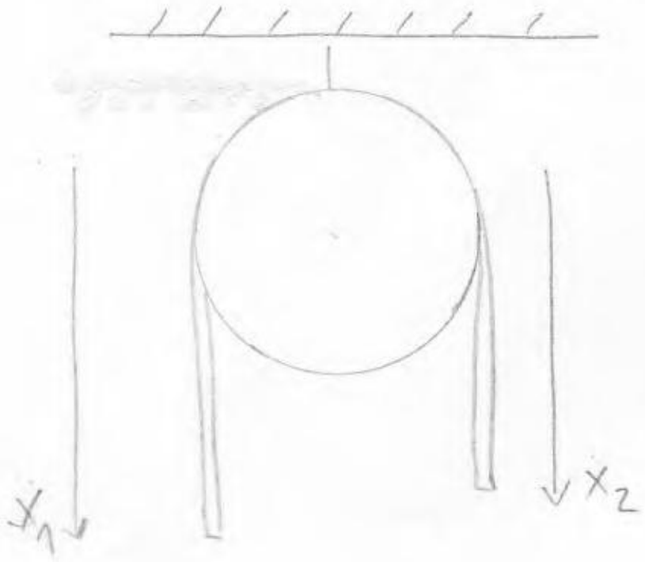
1) 6.5

Tarea 1

Ejercicio 1:

Considere una cuerda de largo L y densidad de masa uniforme ρ sobre una polea sin masa. (No hay masas m_1 y m_2 amarradas a la cuerda)

a) Use el principio de D'Alembert para encontrar la aceleración de un extremo de la cuerda.



El principio de D'Alembert:

$$\delta W' = \sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i' = 0$$

Donde $\delta \vec{r}_i'$ son compatibles a las fuerzas de ligadura, por lo que no consideramos la contribución de las fuerzas de ligadura

Tenemos que $\vec{F}_1 = \rho x_1 g \hat{x}$ y $\vec{F}_2 = \rho x_2 g \hat{x}$

$\vec{a}_1 = \ddot{x}_1 \hat{x}$ $\quad$ $\vec{a}_2 = \ddot{x}_2 \hat{x}$

Además que $x_1 + x_2 = L$

Usando el principio de D'Alembert:

$$\delta W' = (\rho x_1 g \hat{x} - \rho x_1 \ddot{x}_1 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (\rho x_2 g \hat{x} - \rho x_2 \ddot{x}_2 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_2' = 0$$

Que es equivalente a

$$\delta W' = (x_1 g \hat{x} - x_1 \ddot{x}_1 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (x_2 g \hat{x} - x_2 \ddot{x}_2 \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_2' = 0$$

$\delta \vec{r}_1'$ y $\delta \vec{r}_2'$ son desplazamientos virtuales compatibles

$\delta \vec{r}_1' = \delta x_1 \hat{x}$ y $\delta x_1 + \delta x_2 = 0$

$\delta \vec{r}_2' = \delta x_2 \hat{x}$ $\quad \Rightarrow \delta x_2 = -\delta x_1$

$$\delta W' = (x_1 g \hat{x} - x_1 \ddot{x}_1 \hat{x}) \cdot (\delta x_1 \hat{x}) + (x_2 g \hat{x} - x_2 \ddot{x}_2 \hat{x})(\delta x_2 \hat{x}) = 0$$

usando que $\delta x_2 = -\delta x_1$

$$\delta W' = (x_1 g - x_1 \ddot{x}_1) \cdot (\delta x_1) + (x_2 g - x_2 \ddot{x}_2)(-\delta x_1) = 0$$

y como δx_1 es arbitrario

$$(x_1 g - x_1 \ddot{x}_1) + (x_2 g - x_2 \ddot{x}_2) = 0$$

$$g(x_1 - x_2) - x_1 \ddot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_2 = 0$$

Como $x_1 + x_2 = L \Rightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

Queda:

$$g(x_1 - x_2) - \ddot{x}_1 (x_1 + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = g\frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)}$$

Lo dejamos en función de x_1

$$\ddot{x}_1 = g\frac{(2x_1 - L)}{L}$$

Nos queda la función diferencial en x_1

$$\ddot{x}_1 - \frac{2g}{L} x_1 = -g$$

La solución a la homogenea:

$$\ddot{x}_1 - \frac{2g}{L} x_1 = 0$$

$$\left(D^2 - \frac{2g}{L} D^0\right)(x) = 0$$

Del polinomio característico:

$$p(D) = D^2 - \frac{2g}{L} \Rightarrow \text{raíces: } D = \pm\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$$x_1(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}, \quad C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}$$

Llamamos $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

Una solución particular:

$$(D^2 - \omega^2)(x) = -g \quad / \cdot D$$
$$D(D^2-\omega^2)(x) = 0.$$

$\Rightarrow$ solución particular satisface

$$D(x)=0.$$
$$x_p(t) = K = cte.$$

Buscamos K:

La solución general es:

$$x_1(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + K$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}_1(t) = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t}$$
$$\ddot{x}_1(t) = C_1 \omega^2 e^{\omega t} + C_2 \omega^2 e^{-\omega t}$$

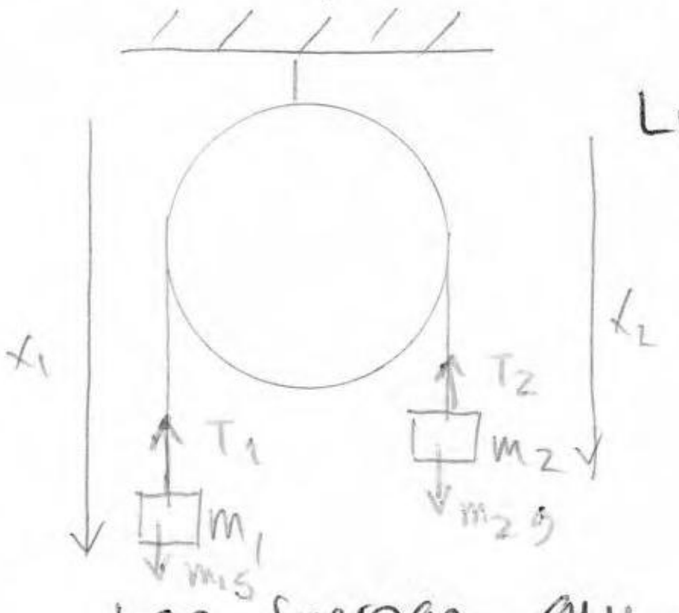
Reemplazando en la ecuación diferencial

$$(C_1 \omega^2 e^{\omega t} + C_2 \omega^2 e^{-\omega t}) - \omega^2 (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + K) = -g$$
$$-\omega^2 K = -g$$
$$-K \cdot \frac{2g}{L} = -g$$
$$\Rightarrow K = \frac{L}{2}$$

La ecuación de movimiento:

$$x_1(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{L}{2}, \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

(b) Verifique el resultado de (a) resolviéndolo por otro método:



Lo pensamos como dos masas en la polea de modo que

$m_1 = \rho x_1$

$m_2 = \rho x_2$

$F = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x}$

con masa variable

Las fuerzas que actúan son: la tensión y el peso.

para m_1:

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$-T_1 \hat{x} + m_1 g \hat{x} = m_1 \ddot{x}_1 \hat{x}$$

$$-T_1 \hat{x} + \rho x_1 g \hat{x} = \rho x_1 \ddot{x}_1 \hat{x} \quad (1)$$

Para m_2 análogamente:

$$-T_2 \hat{x} + \rho x_2 g \hat{x} = \rho x_2 \ddot{x}_2 \hat{x} \quad (2)$$

Como las tensiones son iguales

Reemplazamos T_1 de (1) en (2)

$$\cancel{\rho} x_1 \ddot{x}_1 \hat{x} - \cancel{\rho} x_1 g \hat{x} + \cancel{\rho} x_2 g \hat{x} = \cancel{\rho} x_2 \ddot{x}_2 \hat{x}$$

Que es equivalente a:

$$x_1 \ddot{x}_1 - x_1 g + x_2 g = x_2 \ddot{x}_2$$

$$x_1 \ddot{x}_1 - x_2 \ddot{x}_2 + g(x_2 - x_1) = 0$$

Como la cuerda es ideal: $x_1 + x_2 = L$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 (x_1 + x_2) + g(x_2 - x_1) = 0$$

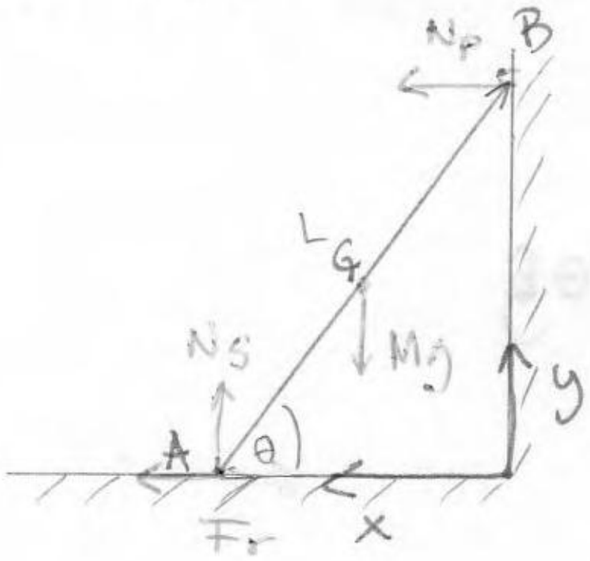
$$\ddot{x}_1 = \frac{g(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)} = g\left(\frac{2x_1 - L}{L}\right)$$

Vemos que se verifica.

Que es la misma ecuación diferencial que ya resolvimos.

Ejercicio 2:

Una escalera de largo L y masa M se encuentra apoyada sobre una pared, formando un ángulo θ con el suelo. Use el principio de los trabajos virtuales para encontrar las fuerzas que ejercen el suelo y la pared sobre la escalera.



El principio de los trabajos virtuales

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i' = 0$$

Donde $\vec{F}_i$ es la fuerza aplicada, sin incluir las de ligazón cuando $\delta \vec{r}_i'$ es compatible con ésta.

Tenemos que:

- Si hacemos un desplazamiento horizontal, no es necesario considerar N_s, nos queda:

$$(F_r \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (-Mg\hat{y}) \cdot \delta \vec{r}_2' + (N_p \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_3' = 0 = \delta W$$

como $\delta \vec{r}_1'$, $\delta \vec{r}_2'$ y $\delta \vec{r}_3'$ son compatibles

$\delta \vec{r}_1' = \delta \vec{r}_2' = \delta \vec{r}_3' = \delta x \, \hat{x}$, donde δx es arbitrario.

$$(F_r \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) + (-Mg\hat{y}) \cdot (\delta x \hat{x}) + (N_p \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) = 0$$

$F_r \delta x + N_p \delta x = 0$, como δx es arbitrario

$\Rightarrow -N_p = F_r$

- Si realizamos un desplazamiento vertical, no es necesario considerar N_p, queda:

$$(F_r \hat{x}) \cdot \delta \vec{r}_1' + (-Mg\hat{y}) \cdot \delta \vec{r}_2' + (N_s \hat{y}) \cdot \delta \vec{r}_3' = 0$$

donde $\delta \vec{r}_1' = \delta \vec{r}_2' = \delta \vec{r}_3' = \delta y \hat{y}$, con δy arbitrario

$$(F_r \hat{x}) \cdot (\delta y \hat{y}) + (-Mg\hat{y}) \cdot (\delta y \hat{y}) + (N_s \hat{y}) \cdot (\delta y \hat{y}) = 0$$

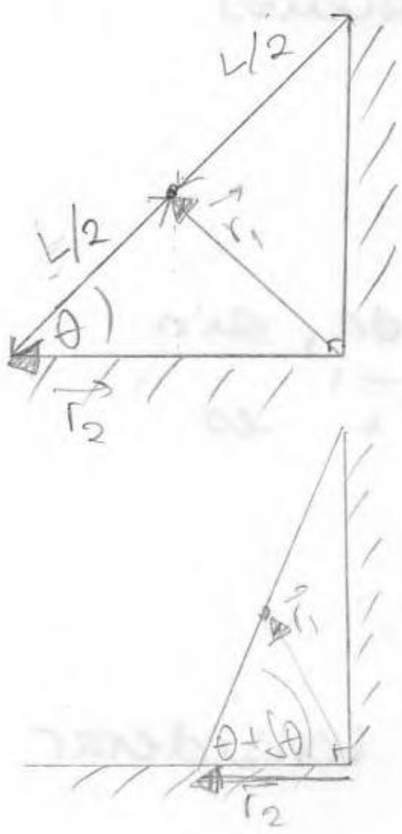
$-Mg\delta y + N_s \delta y = 0$, como δy es arbitrario

$\Rightarrow N_s = Mg$

Por último realizamos un desplazamiento en θ, entonces no será necesario considerar ninguna de las normales, porque el desplazamiento es compatible con ambas restricciones, queda:

$$(-Mg\hat{y})\cdot\delta\vec{r}_1' + (Fr\,\hat{x})\cdot\delta\vec{r}_2' = 0$$

Donde $\vec{r}_1 = \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{x} + \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{y}$



$$\Rightarrow \delta\vec{r}_1' = -\frac{L}{2}\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\delta\theta\,\hat{y}$$

donde $\delta\theta$ es arbitrario.

$$\vec{r}_2 = L\cos\theta\,\hat{x}$$
$$\delta\vec{r}_2' = -L\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x}$$

Queda:

$$(-Mg\,\hat{y})\cdot\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\delta\theta\,\hat{y}\right) + (Fr\,\hat{x})\cdot(-L\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{x}) = 0$$

$$-\frac{MgL}{2}\cos\theta\,\delta\theta - Fr\,L\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

como $\delta\theta$ es arbitrario

$$-\frac{Mg\cancel{L}}{2}\cos\theta = Fr\,\cancel{L}\sin\theta$$

$$Fr = -\frac{Mg}{2}\,\mathrm{ctn}(\theta)$$

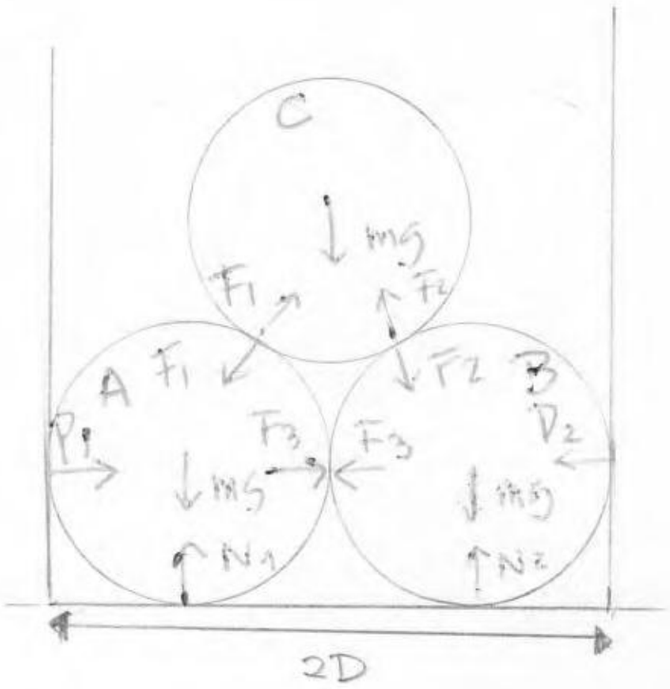
Finalmente obtenemos:

$$\vec{N}_s = Mg\,\hat{y} \quad , \quad \vec{N}_p = \frac{Mg}{2}\,\mathrm{ctn}(\theta)\,\hat{x}$$

$$\vec{Fr} = -\frac{Mg}{2}\,\mathrm{ctn}(\theta)\,\hat{x}$$

Ejercicio 3:

Tenemos dos paredes verticales separadas por una distancia 2D. En el espacio entre las paredes hay dos cilindros de radio D/2 cada uno, apoyados sobre el suelo. Sobre ellos descansa otro cilindro de radio D/2 (descansa en la hendidura) Calcule la fuerza entre los cilindros y las fuerzas que hacen las paredes y el suelo sobre los cilindros.



Si utilizamos el principio de los trabajos virtuales.

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i' = 0$$

Donde $\delta \vec{r}_i'$ es consistente con las fuerzas de ligadura.

Si hacemos un desplazamiento horizontal, solo consideremos las fuerzas P_1 y P_2

$$(P_1 \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) + (-P_2 \hat{x}) \cdot (\delta x \hat{x}) = 0 \quad , \text{ como } \delta x \text{ es arbitrario}$$

$$P_1 - P_2 = 0 \quad \Rightarrow P_1 = P_2$$

Si hacemos un desplazamiento vertical, no consideramos las fuerzas entre los cilindros.

$$(N_1 \hat{y}) \cdot (\delta y \hat{y}) + (N_2 \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) = 0$$

$$N_1 \delta y + N_2 \delta y - 3mg \delta y = 0 \quad , \text{ como } \delta y \text{ es arbitrario}$$

$$N_1 + N_2 - 3mg = 0.$$

Si 'desplazamos' el cilindro A, verticalmente:

$$(N_1 \hat{y})(\delta y \hat{y}) + (-mg \hat{y})(\delta y \hat{y}) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 \hat{y}\right)(\delta y \hat{y}) = 0$$

$$N_1 \delta y - mg \delta y - \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 \delta y = 0 \quad \text{como } \delta y \text{ es arbitrario.}$$

$$N_1 - mg - \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 = 0.$$

Si 'desplazamos' el cilindro A horizontalmente:

$$(P_1 \hat{x})(\delta x \hat{x}) + \left(-\frac{1}{2} F_1 \hat{x}\right)(\delta x \hat{x}) + (-\hat{x})(\delta x \hat{x}) = 0.$$

Como δx es arbitrario:

$$P_1 - \frac{1}{2} F_1 - F_3 = 0$$

Si 'desplazamos' el cilindro C horizontalmente:

$$\left(\frac{1}{2} F_1 \hat{x}\right)(\delta x \hat{x}) + \left(\frac{1}{2} F_2 \hat{x}\right)(\delta x \hat{x}) = 0$$

Como δx es arbitrario $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{2} F_2 = 0$

$$F_1 = F_2$$

Si 'desplazamos' el cilindro C verticalmente:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 \hat{y}\right)(\delta y \hat{y}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} F_2 \hat{y}\right)(\delta y \hat{y}) + (-mg\hat{y})(\delta y \hat{y}) = 0$$

Como δy es arbitrario:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 - mg = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 + F_2) = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_1 = F_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}}}$$

De las ecuaciones anteriores.

$$N_1 = mg + \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 = \frac{3}{2} mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_1 = \frac{3}{2} mg}$$

$$N_1 + N_2 = 3mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_2 = \frac{3}{2} mg}$$

Si asumimos que $F_3 = 0$

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} mg$$

Ejercicio 4:

Encuentre el periodo del oscilador $x'' + f(x) = 0$, donde $f(x) = x$ si $x \leq 1$, $f(x) = x + r(1-x)$ si $x > 1$ donde el parámetro $r > 0$. Exprese el periodo en términos de la amplitud A del movimiento y del parámetro r.

Para $x \leq 1$

Nos queda $x'' + x = 0$

Cuya solución es del tipo:

$$x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$$

Para el segundo caso:

$$x'' + x(1-r) = -r$$

La solución a la ecuación homogenea para $0 < r < 1$ es:

$$x(t) = K_1 \cos(\sqrt{1-r}\, t) + K_2 \sin(\sqrt{1-r}\, t)$$

para $r \geq 1$.

$$x(t) = k \cdot e^{\sqrt{r-1}\, t}$$

Y una solución particular es: $x(t) = \frac{r}{r-1}$

La solución queda.

$$x(t) = \begin{cases} C_1 \cos(t) + C_2 \sin t & x \leq 1 \\ K_1 \cos(\sqrt{1-r}\, t) + K_2 \sin(\sqrt{1-r}\, t) + \frac{r}{r-1} & x > 1,\ 0 < r < 1 \\ k\, e^{\sqrt{r-1}\, t} + \frac{r}{r-1}, & x > 1,\ r \geq 1 \end{cases}$$